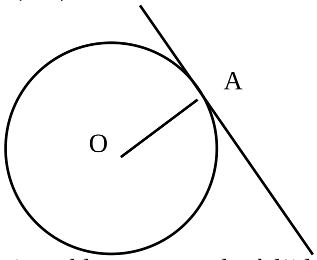
DERIVATION

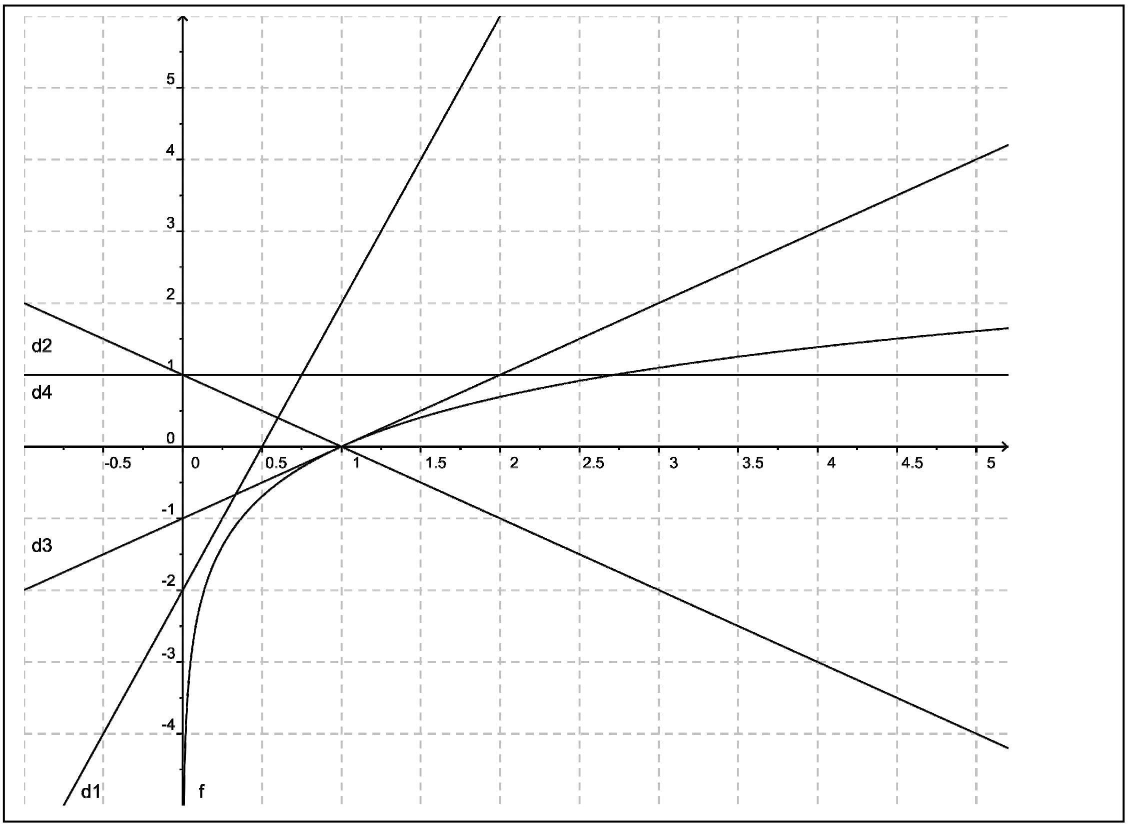
I) Tangente à une courbe et nombre dérivé

1°)Exemples :

Vous connaissez la tangente T en un point A à un cercle C de centre O qui est la droite (car elle est unique) perpendiculaire en A (point de contact entre T et C) au rayon (OA).



Sur la figure ci-dessous quelle est la droite qui semble correspondre à l'idée intuitive de tangente ?



Il n'y a que la droite d3 qui correspond à l'idée intuitive de la tangente à une courbe. On admettra que , comme pour le cercle, cette tangente à C est unique.

Cependant le procédé de construction n'est pas le même.

2°)Equation d'une tangente

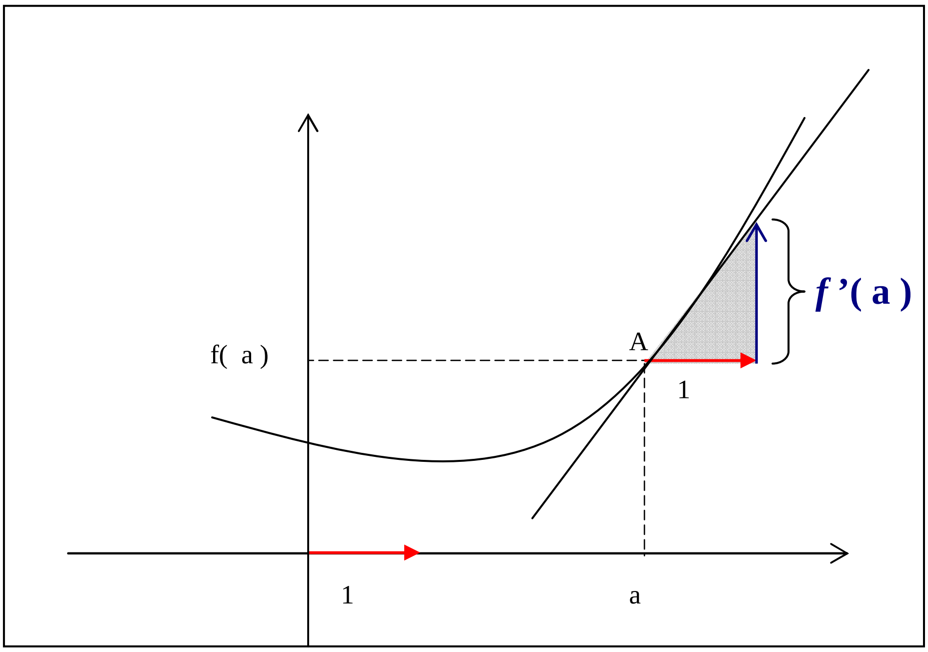
On appelle

NOMBRE DERIVE DE f en a NOTE $\boldsymbol{f'(a)}$

Le COEFFICIENT DIRECTEUR de la tangente à la courbe de f

au point d'abscisse a.

Si une fonction f admet en a un nombre dérivé on dit que f est dérivable en a



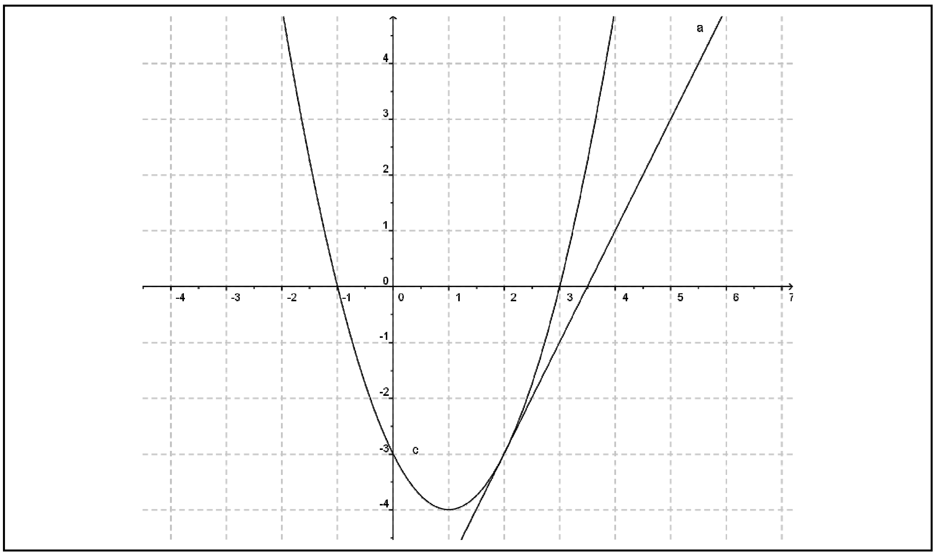
Conséquence

Une équation de la tangente à C en au point A d'abscisse a c'est - à - dire au point de coordonnées (a ; f (a))est

$$\boxed{y = \boldsymbol{f'(a)} . (x - a) + f (a)}$$

Exercice

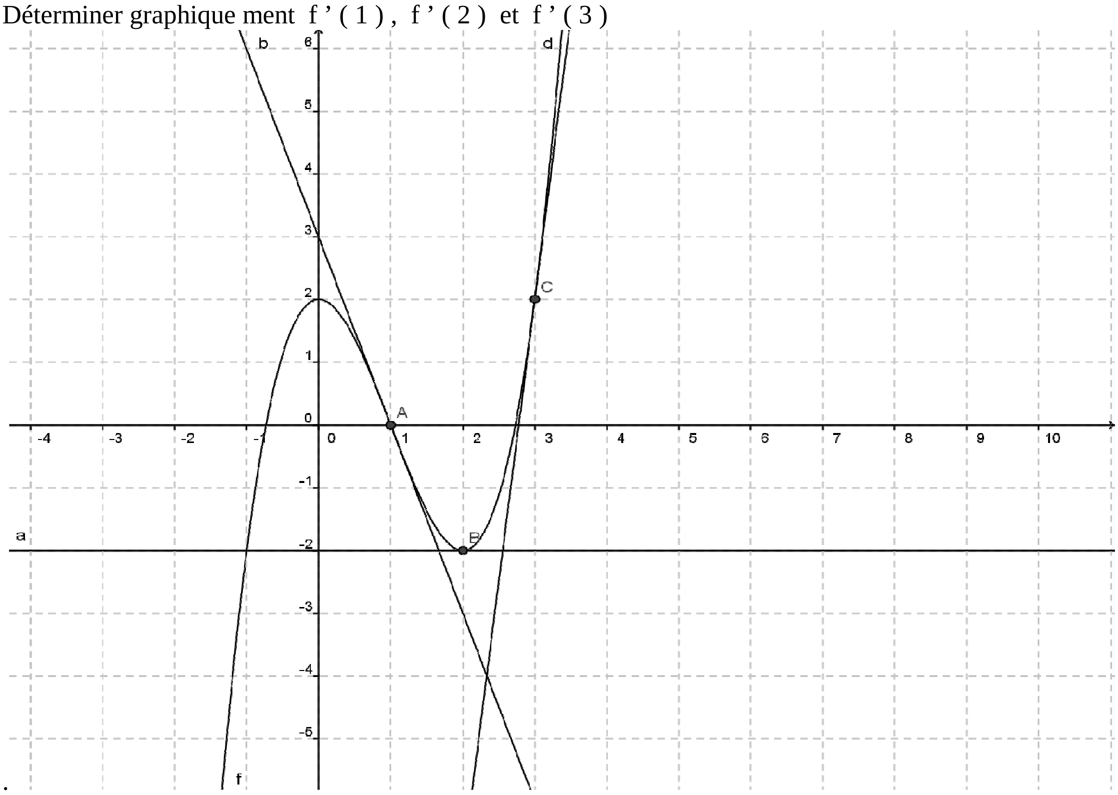
1°) Représenter graphiquement la fonction f(x) = $x^2 - 2x - 3$. On note C la courbe obtenue.
2°) Construire tangente T à la courbe C au point A d'abscisse 2.
3°) Déterminer l'équation réduite de la tangente T.



T : y = f '(2) (x – 2) + f(2) donc T : y = 2 x – 7

Exercice 2

Déterminer graphique ment f ' (1) , f ' (2) et f ' (3)

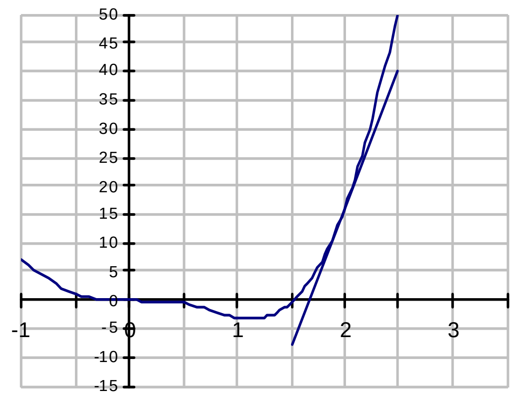


.

Exercice 3

Soit *f* la *f*onction dé*f*inie sur [-2 ;2]
dont la courbe C est donnée ci-contre.

1°) Déterminer le nombre dérivé de *f* en 2.
2°) Donner une équation de la tangente à C au point d'abscisse .



Corrigé : 1°) f ' (2) = + 25/+0.5 = 50
Car f '(2) est le COEFFICIENT DIRECTEUR DE LA TANGENTE AU POINT D'ABSCISSE 2.
2°) y = 50 x - 8 5

II) Dérivée d'une *f*onction

f désigne une *f*onction dé*f*inie et dérivable sur un intervalle I .

1°) *F*ormulaires des *f*onctions usuelles

Ce tableau doit être connu par*f*aitement.♥

f	Df	f'	D f'
a	R	0	R
x		1	
ax+b		a	
x^2		$2x$	
ax^2		2ax	
x^3		$3x^2$	
ax^3		3ax^2	
x^n n∈ N*		nx^{n-1}	
$\frac{1}{x}$	R*	$-\frac{1}{x^2}$	R*
$\sqrt{x}$	R^+	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	R^{+*}
cos$x$	R	-sin$x$	R
sin$x$	R	cos$x$	R

OPERATIONS	EXEMPLES : Dans chaque cas calculer la dérivée de la *f*onction donnée sur I.
Somme $\boxed{(U + V)' = U' + V'}$	Soit *f* la *f*onction dé*f*inie sur [1 ;18] par $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ $f'(x)= 3x^2 - \frac{1}{x^2}$
Produit par un réel $\boxed{(aU)'= aU'}$	Soit *f* la *f*onction dé*f*inie sur R par $f(x) = 5x^6$ $f'(x)=30\ x^5$

3°) Déterminer l'équation de la tangente à une courbe par le calcul

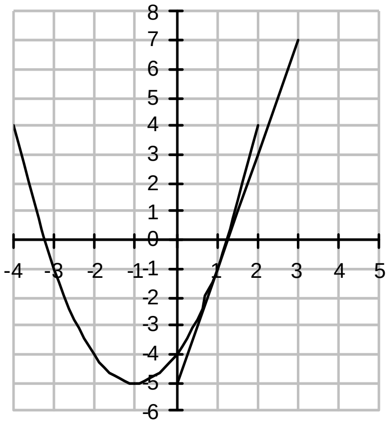
Exemple

1°) Représenter graphiquement la fonction f définie sur [-4 ; 2] par $f(x)= x^2 + 2x - 4$ .On note C la courbe obtenue .
2°) Calculer la dérivée f' de f.
3°) Montrer qu'une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1 est $y = 4x - 5$.
4°) Tracer T .
corrigé
1°)2°) $f'(x)= 2x + 2$
3°) Equation de la tangente T au point d'abscisse 1 :

$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

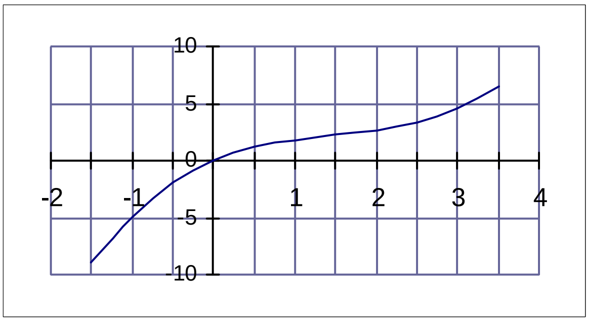
soit $y = 4 (x - 1) - 1$

Soit encore $y = 4x - 5$



Exercice 1

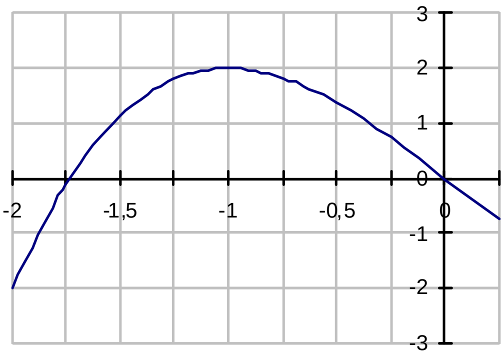
Soit la fonction f définie sur [-2 ; 4] par
$f(x)= x^3 /3- 1.5.x^2+3x$. On note C sa courbe ci-contre .
1°) Calculer la dérivée f' de f.
2°) Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.
3°) Tracer T .



Corrigé : 1°) $f'(x) = x^2 – 3x + 3$ 2°) $y = f'(0) x + f(0)$ soit $y = 3x$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur [-2 ; ¼] par $f (x) = x^3 - 3x$
dont la courbe C est donnée ci-contre.
1°) Tracer la tangente à C au point d'abscisse -1.
2°) Donner une équation de la tangente à C au point O.



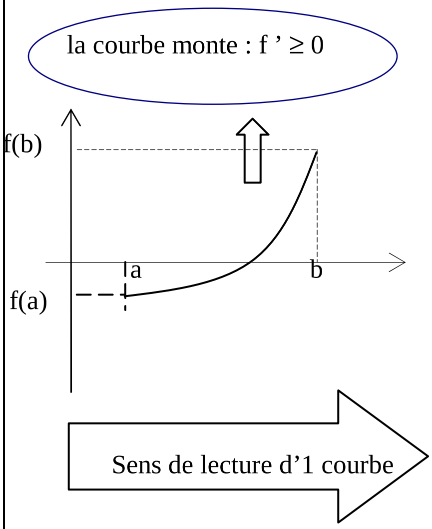
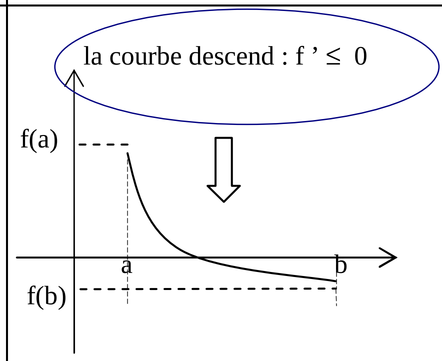
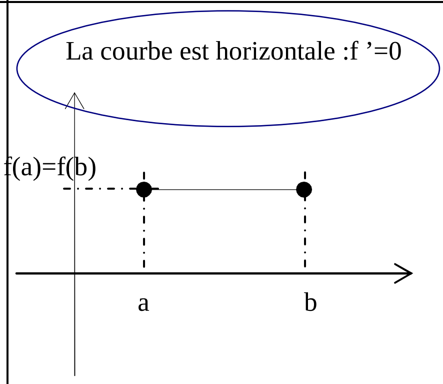
Corrigé : 1°) $f'(- 1) = 0$ la tangente est donc HORIZONTALE au point d'abscisse -1 . 2°) $y = -3x$

Remarques :

Une équation de la tangente au point **d'abscisse 0**, s'écrit $\mathbf{y = f'(0)\, x + f(0)}$
La tangente à la courbe en un point d'abscisse a est horizontale ssi $\mathbf{f'(a) = 0}$

III) Signe de la dérivée et sens de variation.

1°) Théorème fondamental f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

VARIATIONS	COURBE	TABLEAU
Si f '≥ 0 sur I Alors f est **croissante** sur I.	 	x : a … b f '(x) : + f(x) : f(a) ↗ f(b)
Si f ' ≤ 0 sur I alors f est **décroissante** sur I.	 	x : a … b f '(x) : - f(x) : f(a) ↘ f(b)
Si f ' = 0 sur I alors f est constante sur I.	 	x : a … b f(x) : f(a) → f(b)

2°) Application à l'étude des variations d'une fonction

On veut étudier les variations de la fonction f définie sur [-10 ; 10] par f(x)= $x^3 - x^2 - x + 3$
Pour cela on calcule la dérivée f 'de f et on étudie le signe de f ' sur R : f '(x)= $3x^2 - 2x - 1$ .D'après la règle sur le signe du trinôme on a donc le signe de f '(x) et le tableau de variation de f :

x	-10		- 1/3		1		10
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	-1087	↗	**86/27**	↘	2	↗	893

Remarque : dans le tableau de variation on ne met (sauf précisions contraires du texte) que des **valeurs EXACTES** !

IV) Dérivation et applications

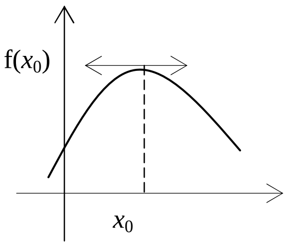
1°) Extrémum local

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert] a , b[et xo ∈]a , b[.
Si f '(x) s'annule en xo en changeant de signe alors f admet en xo un extrémum local .

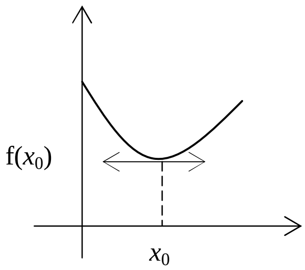
x		xo	
f '(x)	+	0	-
f(x)	↗	f(xo)	↘

maximum



x		xo	
f '(x)	+	0	-
f(x)	↘	f(xo)	↗

minimum



Remarque : en un extremum local la tangente est **horizontale**.

Contre - exemple : **Attention** si f '(x) s'annule sans changer de signe alors il n'y a pas d'extremum .
Considérons la fonction f (x)= x^3 sur [-2, 2] ; on a bien f '(0)=0 cependant comme f '(x)=$3x^2$ ne change pas de signe sur [-2 ;2](f'(x)≥ 0) il n'y a pas d'extremum en 0 .

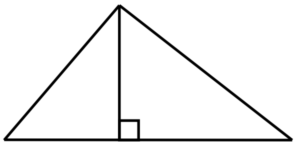
2°) **Optimisation**

Dans un problème d’optimisation (qui constitue souvent les problèmes des sujets du bac AA !) on doit :

- Chercher une grandeur V(un volume , une surface ...) qui dépendra d’une inconnue x(une longueur par exemple)
- En s’aidant de l’étude des variations d’une fonction et du théorème ci-dessus , déterminer la valeur xo (si elle existe) pour laquelle V admet un maximum ou un minimum .
- Calculer V(xo).

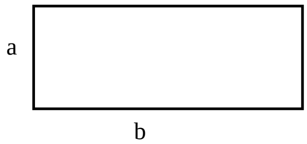
Comme il y a souvent des surfaces ou des volumes dans ces problèmes voici rappelés les aires et volumes des figures et solides usuels

1. Triangle



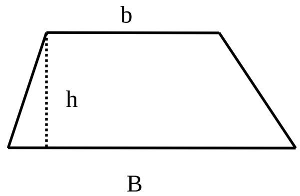
Aire :

2. Rectangle



Aire :

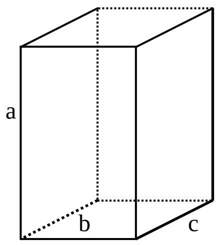
3.Trapèze



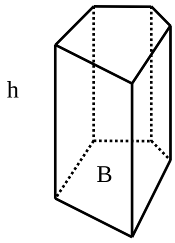
Aire :

SOLIDES

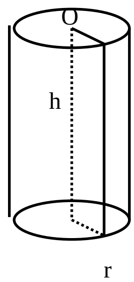
1. parallélépipède rectangle



2. prisme droit



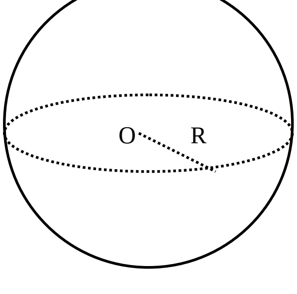
3. Cylindre de révolution



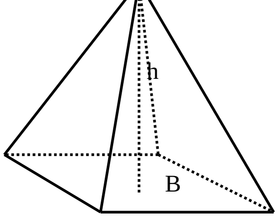
Volume :

Aire latérale (disques de base non compris) :

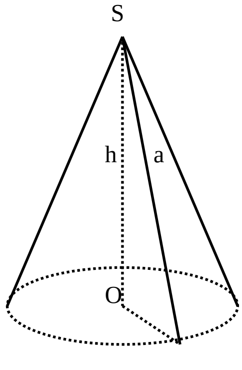
4. Sphère



5.Pyramide régulière

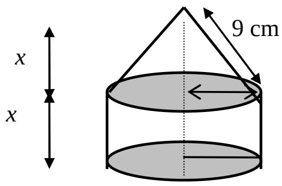


Cône de révolution



3°) **Exemple** :

Une boîte à bijoux constituée d'un cône posé sur un cylindre doit être fabriquée comme le montre le schéma ci-dessous. On se propose de déterminer ses dimensions pour que son volume soit maximal.



Partie I :

1.Exprimer en fonction de x le rayon R .

2.Exprimer en fonction de x le volume V(x) de la boîte.

(On rappelle que le volume d'un cône est

$\frac{1}{3}\pi r^2 h$ où h est la hauteur du cône et r le rayon du cercle de base.

et celui d'un cylindre $\pi r^2 h$ où h est la hauteur du cylindre et r le rayon du cercle de base.)

Partie II

Soit la fonction numérique définie dans l'intervalle I=[0 ; 9] par $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 27x$.

et soit C sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal (O, i , j)

(1 cm représente 1 unité sur l'axe des abscisses et 0.2 cm représente 1 unité sur l'axe des ordonnées).

a)Calculer la dérivée f' de f.

b)Résoudre f'(x)=0 dans |R(on donnera des valeurs exactes des solutions).

b)Etudier le signe de f' sur I et dresser le tableau de variation de f sur I.

2.a)Reproduire et compléter le tableau suivant :

(donner les valeurs de f(x) arrondies à la centaine près)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x)										

b)Construire C.

3.a)Vérifier que V(x)= 4πf(x) .

b)Utiliser la partie I pour déterminer la valeur de x qui rend le volume V(x) maximale.

Quel est dans ce cas le volume de la boîte.