Equations et inéquations du second degré. Signe de ax^2 + bx + c

I) Equations du second degré.

1°)Généralités

Définition 1

Une équation du second degré est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a,b,c sont des réels donnés avec **a≠0.**

Exemples :

$3x^2 + 5x + 4 = 0$ a= 3, b = 5 , c = 4

$x^2 - 2x - 7 = 0$ a= 1, b = -2 , c = -7.

Remarque : Il n'y a « rien » devant x^2 , le « 1 » est « caché » ou sous – entendu puisque 1 x x^2 = x^2 !

Attention : $(x + 2)^2 = x^2 + x + 1$ n'est pas une équation du second degré.
En effet si on développe le terme de droite à savoir $(x + 1)^2$ on obtient l'équation équivalente suivante
$x^2 + 4x + 4 = x^2 + x + 1$ soit $3x + 3 = 0$ qui est une équation du premier degré qui admet – 1 pour solution.

Définition 2:
a,b,c 3 réels donnés (a≠0).La fonction f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to ax^2 + bx + c$ est appelée ***fonction trinôme du second degré***.

2°) Résolution et factorisation.

Théorème 1(résolution)

a,b,c étant des réels tels que a≠0, on considère l'équation (E) $ax^2+bx + c =0$ et le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- **Si $\Delta>0$** (E) admet deux solutions distinctes ds $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- **Si $\Delta= 0$** (E) admet une seule solution ds $\mathbb{R}$: $x_o = -\dfrac{b}{2a}$

- **Si $\Delta< 0$ (E) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$**.

Exemples : Résoudre dans $\mathbb{R}$

$3x^2 + 2x -1 = 0$	$16x^2 + 8x +1 = 0$	$-x^2 + x -1 = 0$
$\Delta= (2)^2 - 4\times3\times(-1)=4+12=16$ S={-1 ; 1/3 }	$\Delta= 0$	$\Delta= - 3$
$x_1=\dfrac{-2+4}{6}=\dfrac{1}{3}$	$x_0 = -$ ¼	Pas de solution dans R
$x_2=\dfrac{-2-4}{6} = -1$	S={-1/4}	S=∅

Cas particulier : Lorsque le trinôme est incomplet on peut résoudre l'équation sans utiliser Δ.

a) (b = 0) $4x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1/4$
$x = -1/2$ ou $x = 1/2$
S={- ½ ; ½ }

b) $x^2 + 2 = 0$
$x^2 = -2$ or pour tout réel x
$x^2 \geq 0$ donc
S=∅

c) (c = 0) $2x^2 + x = 0$.
On factorise par x d'où
$x\ (2x + 1) = 0$
S={- ½ ; 0 }

Remarque : Ne jamais perdre de vue que c'est la variable *x* que l'on cherche et que **dans le discriminant la variable *x* n'apparaît pas** !

Exercice 3: Résoudre dans |R les équations suivantes

a) $x^2 + x - 6 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4\times1\times(-6) = 1+24 = 25$

$x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ $\quad x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$

S = { -3 ; 2 }

b) $x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Delta = 9$

S = { 1 ; 4 }

C) $3x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 13$

S = { $(-1 - \sqrt{13}) / 6$; $(-1 + \sqrt{13})/ 6$ }

c) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

$\Delta = 0$

S = { -1/3}

e) $x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = 8$ S = { $-1 - \sqrt{2}$; $-1 + \sqrt{2}$ }

f) $x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = -3$ S = Ø

g) $3x^2 + 2x = 0$

x(3x + 2) = 0 S = { -2/3; 0}

h) $3x^2 - 1 = 0$

S = { $-1/\sqrt{3}$;$1/\sqrt{3}$}

i) $5x^2 + 2 = 0$

S =Ø

j)- $15x^2 - 10x + 5 = 0$

Δ=400

S = { -1 ; 1/3}

k) $\frac{1}{2}x^2 - 5x - 7 = 0$

$\Delta = 39$

S = { $5 - \sqrt{39}$; $5 + \sqrt{39}$}

l) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (*)

équivaut à résoudre le système $\begin{cases} X = x^2 \\ X^2 - 3X + 2 \text{ (E)} \end{cases}$

(il s'agit d'une équation bicarrée on effectue un changement de variable pour la résoudre) Δ=1

1et 2 sont solutions de (E) donc le système équivaut à

X = 1 ou X = 2 puisque l'autre solution est 2

Soit $x^2 = 1$ ou $x^2 = 2$

D'où S = { $-\sqrt{2}$; -1 ; 1 ; $\sqrt{2}$}

Théorème 1 bis (factorisation) $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et avec les notations du théorème 1.

- Si $\Delta>0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Si $\Delta= 0$: $f(x) = a(x - x_o)$
- Si $\Delta< 0$: $f(x)$ n'est pas factorisable dans |R en produit de facteurs du premier degré.

Remarques : 1) On appelle racines du trinôme toute solution de l'équation (E).Si $\Delta= 0$ on dit racine double.

2) Savoir utiliser sa calculatrice.

Exemples : Donner lorsque c'est possible une factorisation des trinômes suivants

1) $f(x)=x^2 - 3x + 2$ 2) $g(x)= 5x^2 + 8x + 3$ 3) $h(x)= 9x^2 + 6x + 1$ 4) $p(x)= x^2 - 2x + 3$

$f(x)=x^2 - 3x + 2$	$g(x)= 5x^2 + 8x + 3$	$h(x)= 9x^2 + 6x + 1$	$p(x)= x^2 - 2x + 3$
$\Delta= (-3)^2 - 4\times1\times(2)=9-8=1$ $x_1= 1$ $x_2 = 2$ $f(x)=(x - 1)(x - 2)$	$\Delta= 4$ $x_1= -1$ $x_2 = -3/5$ $g(x)=5(x+3/5)(x+1)=(5x + 3)(x+1)$	$\Delta= 0$ $x_0= - 1/3$ $h(x)=9(x+1/3)^2$	$\Delta= -8$ $p(x)$ n'est pas factorisable dans |R en produit de facteurs du premier degré.

II) Signe du trinôme. Inéquations du second degré

1°) Signe du trinôme

Théorème 2

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$ le discriminant de f.

- **Si $\Delta>0$**

x	$- \infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de f(x)		sg(a)	0	sg(-a)	0	sg(a)	

(en supposant par exemple ici que $x_1 < x_2$ sinon on aurait x_2 avant x_1 dans le tableau)

- Si $\Delta= 0$

x	$- \infty$		x_0		$+\infty$
f(x)		sg(a)	0	sg(a)	

- Si $\Delta< 0$

x	$- \infty$		$+\infty$
f(x)		sg(a)	

<u>Remarque :</u> en clair si $\Delta>0$: … **et si a positif** (<u>rappel</u> : **a** est **le nombre « qui est devant x^2 »**) alors

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de f(x)		+	0	$\boxed{-}$	0	+	

…Et si a négatif

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de f(x)		$\boxed{-}$	0	+	0	$\boxed{-}$	

<u>Exemples :</u>

$f(x)= x^2 + 2x -3$	$g(x)= 4x^2 + 3x - 1$	$h(x)= - x^2 + 5x + 6$	$I(x)= -2x^2 + 5x - 8$
a = 1 donc c'est le cas où a positif $\Delta = 16$ $x_1= -3$ $x_2= 1$ ici – 3 < 1 donc	a = 4 donc c'est le cas où a positif $\Delta = 25$ $\Delta > 0$ $x_1= -1$ $x_2= \frac{1}{4}$	a = -1 donc c'est le cas où a négatif $\Delta = 49$ $x_1= 6$ $x_2= -1$ ici – 1 < 6 donc	a = -2 donc c'est le cas où a négatif $\Delta = - 39$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$g(x)$		+	0	-	0	+	

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
$h(x)$		-	0	+	0	-	

x	$-\infty$		$+\infty$
$I(x)$		-	

<u>2°) Résolution d'inéquations.</u>

<u>a) Méthode :</u> étape 1 : on étudie le signe du trinôme donné dans un tableau d'après le théorème sur le signe du trinôme

étape 2 : En lisant le tableau on peut alors résoudre l'inéquation.

<u>b)Exemples :</u>

Résoudre dans |R les inéquations suivantes :

$x^2 + 2x -3 \geq 0$	$4x^2 + 3x - 1<0$	$- x^2 + 5x + 6 > 0$	$-2x^2 + 5x -8 \geq 0$
On effectue l'étude ci – dessus Et on a S =] $-\infty$;-3] U[1;$+\infty$[	On effectue l'étude ci – dessus Et on a S =]-1 ; $\frac{1}{4}$ [	On effectue l'étude ci – dessus Et on a S =]-1 ;6[	On effectue l'étude ci – dessus Et on a S =Ø

III)Représentation graphique et interprétation.

Dans la suite le plan est rapporté à un repère (O, i , j).

1°) Représentation graphique du trinôme.

Propriété et Définition

La représentation graphique du trinôme du second degré f est ***une parabole*** de ***sommet*** le point $S\left(-\dfrac{b}{2a} ; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ et ***d'axe de symétrie*** la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$

REMARQUES

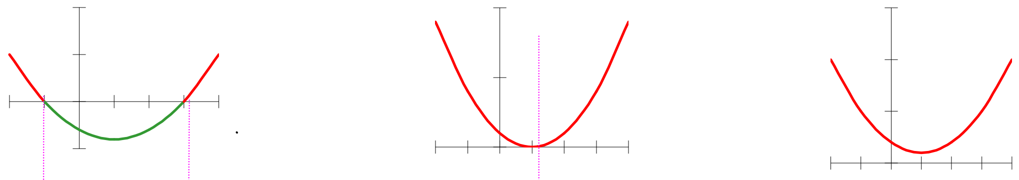
1°) **Si Δ>0 , P coupe l'axe (O,i) aux points d'abscisses x_1 et x_2 qui sont les racines du trinôme.**

2°) Le point **C(0,c)** est le **point d'intersection de P avec l'axe (O,j).**

2°) Interprétation graphique On suppose ici que $x_1 < x_2$ si $\Delta > 0$

	Δ >0	Δ = 0	Δ< 0

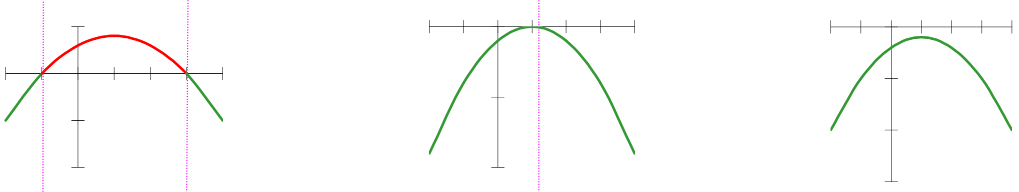
COURBE avec a > 0 « courbe à l'endroit »



x_1 x_2 x_0

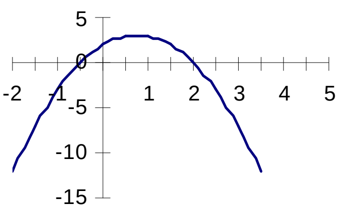
SIGNE + 0 - 0 + | + 0 + | +

COURBE avec a < 0 « courbe à l'envers »



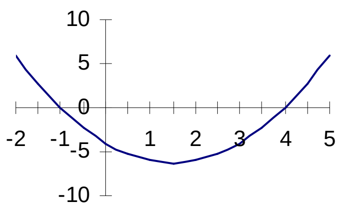
SIGNE - 0 + 0 - | - 0 - | -

Exercices : Donner dans chaque cas le signe du trinôme f(x) à l'aide de sa courbe.



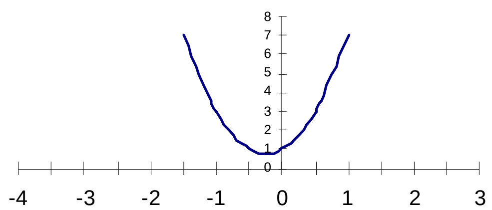
a -1 2

- 0 + 0 -

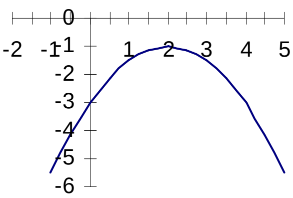


b -1 4

\+ 0 - 0 +

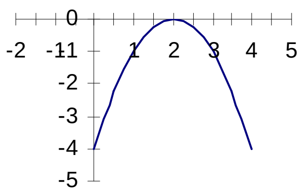


C +



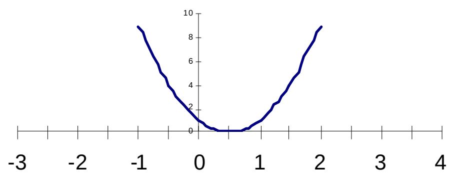
d

\-



2

\- 0 - e



f

0.5

\+ 0 +