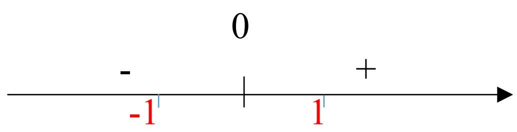
INEQUATIONS
Fiche 1 : Inégalités

1°) Signe d'un nombre

Pour dire qu'un nombre est positif ou négatif on le compare à 0.



x est nul : $x = 0$
x positif ou nul : $x \geq 0$
x strictement positif : $x > 0$
x négatif ou nul : $x \leq 0$
x strictement négatif : $x < 0$

Propriétés

1. $x^2 \geq 0$ pour tout réel x
2. Si a et b sont positifs ou nul alors $a + b \geq 0$

Règle des signes

$+ \times + = +$
$+ \times - = -$
$- \times - = +$
$- \times + = -$

Propriété
Si ab >0 alors a et b sont de même signe
Ex : 2x3 = 6 et (-2)x(-3) = 6
Si ab<0 alors a et b sont de signe contraire
Ex : 2 x (-3) = -6

Critère d'ordre
$a \leq b$ ou $b \geq a$ équivaut à $b - a \geq 0$

Exemple : Sans utiliser la calculatrice montrer que $3\pi - 2 < 4\pi - 5$

$4\pi - 5 - (3\pi - 2) = \pi - 3$. Or $\pi - 3 > 0$ d'où le résultat.

Comparer deux nombres
c'est dire lequel est supérieur à l'autre ou s'ils sont égaux ou opposés.
Exemples : Comparer $\frac{4}{5}$ et $\frac{9}{14}$

2°) Inégalités et opérations

Voir les règles générales p 73

Exemple 1 : ajouter ou soustraire un même nombre

$3 < 4$ donc $3 + 2 < 4 + 2$ soit $5 < 6$

$3 < 4$ donc $3 - 2 < 4 - 2$ soit $1 < 2$

Exercice : x est un réel tel que $x > 5$ donc $x + 2$ ……….
a est un réel tel que $a < 3$ donc $a - 10$ ……….

Exemple 2 : Multiplier ou diviser par un même nombre non nul

Et Positif => cela ne change rien

$10 < 15$ Donc $10 \times 2 < 15 \times 2$ soit $20 < 30$

$10 < 15$ donc $10/5 < 15/5$ soit $2 < 3$

Et Négatif => On change le sens de l'inégalité

$2 < 6$ Donc $2 \times (-3) > 6 \times (-3)$ soit $-6 > -18$

$2 < 6$ donc $2/(-2) > 6/(-2)$ soit $-1 > -3$

Exercice : $x > 5$ donc $3x$ ……….
$x \leq 3$ donc $-4x$ ……….
$x < 10$ donc $x : 2 <$ ……
$x \geq 9$ donc $x : (-3)$ ………

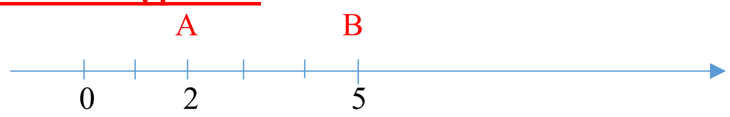
Exemple 3 : Inégalité et somme

$x \leq 3$ alors $x + y \leq 3 + 4$ soit. $x + y \leq 7$
$y \leq 4$

INEQUATIONS

FICHE 2 : Intervalles de R

1°) Première approche



Le segment $[AB]$ est l'ensemble des points de la droite dont l'abscisse x vérifie :

$$2 \leq x \leq 5$$

Par analogie, l'ensemble des réels x qui vérifient $2 \leq x \leq 5$ se note $[2; 5]$

On l'appelle l'intervalle $[2; 5]$.

2°) Des exemples (voir Cas général : p 72 du livre)

	Intervalles	Inégalité(s) associée(s)	Représentation
bornés	$[2; 5]$ fermé	$2 \leq x \leq 5$	
	$[-3; 6[$	$-3 \leq x < 6$	
	$]5 ; 7]$	$5 < x \leq 7$	
	$]-1 ; 10[$	$-1 < x < 10$	
Non bornés	$[3; +\infty[$	$x \geq 3$	 **3 est compris, on est à droite de 3**
	$]-1 ; +\infty[$ Ouvert	$x > -1$	 **-1 est exclu, on. est à droite de -1**
	$]-\infty ; 2]$	$x \leq 2$	 **3 est compris, on est à droite de 3**
	$]-\infty ; 4[$ Ouvert	$x < 4$	 **4 est exclu, on est à gauche de 4**

L'intervalle $[a ; b]$ est fermé L'intervalle $]a ; b[$ est ouvert.

Les intervalles $[a ; b[$ et $]a ; b]$ sont semi- ouverts ou semi- fermés

Intervalles particuliers

- L'ensemble des réels se note R =]- ∞ ; + ∞ [
- L'ensemble vide ne contient aucun élément : il se note ∅
- Un ensemble contenant un seul réel ou singleton se note {a} ou [a ; a]

Exercices

1. Compléter à l'aide de l'un des symboles ∈ et ∉

a. 2 …. [1,4 ; 2, 0001 [b . $\frac{3}{5}$ ….] 0 ; 1] c. -1 …..[-5 ; -1 [d. -2 …..] -∞ ; -3]

2. Compléter le tableau ci-dessous

Intervalle	$x \in$ [-3 ; 7]			$x \in$]-∞ ;-3]
Inégalités		$-2 \leq x \leq 5$	$x > 3{,}2$	

3. Sur une droite graduée colorier chacun des intervalles suivants :

a. [-1 ; 3]   --

b. b.]-∞ ; 0]   --

c. [-2 ; $\frac{3}{2}$]   --

3°) Intersection et réunion d'intervalles : étude d'exemples

Soit I et J deux intervalles de R.

Définition

Si $x \in$ I **et** $x \in$ J alors $x \in$ I ∩ J (on lit I inter J) : c'est l'intersection de I et J

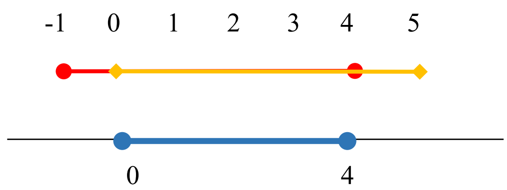
Si $x \in$ I **ou** $x \in$ J alors $x \in$ I ∪ J (on lit I union J) : c'est la réunion de I et J

Exemples

1. I = [-1 ; 4] et J = [0 ; 5] : I ∩ J = [0 ; 4]

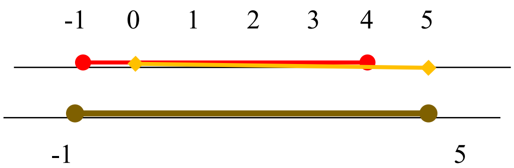
METHODE : Pour s'aider on représente les intervalles sur un schéma et on repasse chaque intervalle avec une couleur différente

Pour trouver I ∩ J on DOIT RENCONTRER LES DEUX COULEURS EN MEME TEMPS



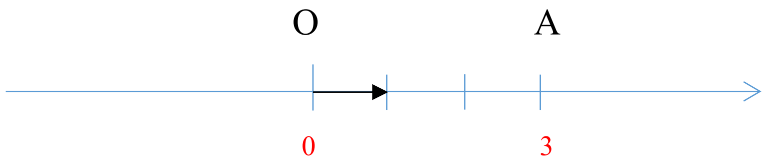
2. I=[-1 ; 4] et J = [0 ; 5] : I ∪ J = [-1 ; 5]

Pour trouver I ∪ J on DOIT PRENDRE « PARTOUT » OU IL Y A UNE COULEUR

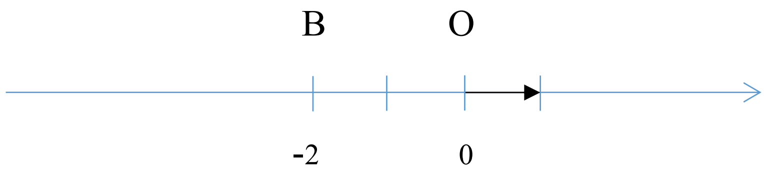


4°) Valeur absolue

a) Etude d'exemples



La distance OA est égale à 3. On a alors que OA= $|3| = 3$



La distance OB est égale à 2. On a alors que OB=$|-2| = 2$

b) Définition

x est l'abscisse d'un point M sur une droite graduée.
La valeur absolue de x *notée* $|x|$ est la distance OM. Ainsi OM = $|x|$.

Conséquences importantes :

1. $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ calculette

Ex : $|-2| = 2$. $|13| = 13$ $|0| = 0$

2.Pour tout x , $|x| \geq 0$
3. Pour tout x $\sqrt{x^2} = |x|$

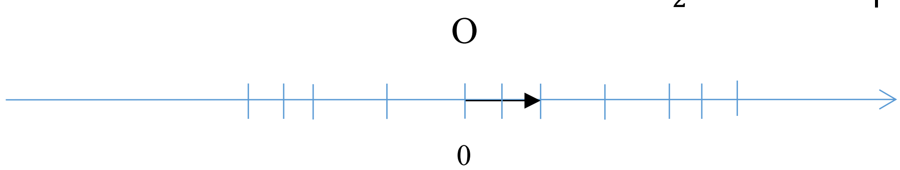
$\sqrt{9^2} = 9$ et $\sqrt{(-4)^2} = 4$

c) Intervalles et valeur absolue (voir p. 74)

Exemple:

$x \in \left[\frac{1}{2} - 3\,;\, \frac{1}{2} + 3\right]$ équivaut à $\frac{1}{2} - 3 \leq x \leq \frac{1}{2} + 3$

soit à $-3 \leq x - \frac{1}{2} \leq 3$ càd $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq 3$



Le centre est $\frac{1}{2}$ et le rayon est 3 .

Propriété

Soit a un réel et r un réel positif.

$x \in [a - r\,;\, a + r]$ équivaut à $|x - a| \leq r$

Exercice :

Déterminer l'intervalle qui contient *x :*

$|x - 1| \leq 2$ $|x + 5| \leq 4$

$x \in [1 - 2\,;\, 1 + 2]$ soit. $x \in [-1\,;\, 3]$

$x \in [-5 - 4\,;\, -5 + 4]$ soit. $x \in [-9\,;\, -1]$

Inéquations
Fiche 3 : Résolution d'inéquations

I) Exemples d'inéquations

1. $x - 3 \geq 0$ équivaut à $x \geq 3$
2. $x - 4 > 6$ équivaut à $x > 6 + 4$ soit à $x > 10$
3. $5x \leq 2$ équivaut à $x \leq \frac{2}{5}$
4. $-6x > 11$ équivaut à $x < -\frac{11}{6}$
5. $2x + 6 \geq x + 10$ équivaut à $2x - x \geq 10 - 6$ soit à $x \geq 4$
6. $x - 7 < 4x - 9$ équivaut à $x - 4x < -9 + 7$ soit à $-3x < -2$ soit finalement $x > \frac{2}{3}$

II) Résolution

1°) Rappel

Résoudre une inéquation dans R c'est donner l'ensemble des réels qui vérifient cette inéquation

2°)Exemples

Résoudre les inéquations suivantes dans R

1. $x - 3 > 0$ équivaut à $x > 3$ d'où S $=]\, 3\,;+\infty\, [$
2. $x - 4 > 6$ équivaut à $x > 10$ d'où S $=]\, 10\,;+\infty\, [$
3. $5x > 2$ équivaut à $x > \frac{2}{5}$ d'où S $=]\, \frac{2}{5}\,;+\infty\, [$
4. $-6x > 11$ équivaut à $x < -\frac{11}{6}$ d'où S $=]\, -\infty\,; -\frac{11}{6}\, [$
5. $2 + 3x > 3\,(x - 2)$