

Exercice 3. Cercle circonscrit**1 + 2 + 1 + 0,5 + 1 + 2,5 = 8 points**

Soit (O, I, J) un repère orthonormé du plan. On considère les points : $A(-3; -1)$, $B(-2; 2)$, $C(3; -3)$.

1. **Faire une figure dans le repère ci-dessous, qui sera complétée par la suite.**

2. **Démontrer que ABC est rectangle en A .**

On est dans un repère orthonormé donc le calcul des distances est légitime.

- $AB^2 = (-2 + 3)^2 + (2 + 1)^2 = (1)^2 + (3)^2 = 1 + 9$ donc $AB^2 = 10$
- $CB^2 = (-2 - 3)^2 + (2 + 3)^2 = (-5)^2 + (5)^2 = 25 + 25$ donc $CB^2 = 50$
- $AC^2 = (3 + 3)^2 + (-3 + 1)^2 = (6)^2 + (-2)^2 = 36 + 4$ donc $AC^2 = 40$

De plus : Si le triangle ABC est rectangle, c'est en A car $[BC]$ est le plus grand côté.

Or

$$\begin{cases} CB^2 & = 50 \\ AB^2 + AC^2 & = 10 + 40 = 50 \end{cases}$$

On a égalité, $BC^2 = BA^2 + AC^2 = 50$, et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A .

3. **Déterminer les coordonnées du point M , centre du cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle ABC .**

Le triangle ABC étant rectangle en A , le centre M du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse $[BC]$ et donc le point M est de coordonnées $M\left(\frac{-2+3}{2}; \frac{2-3}{2}\right)$ soit

$$M\left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right)$$

4. **Calculer le rayon de ce cercle \mathcal{C} .**

Le centre M du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse $[BC]$ et donc le rayon r du cercle est

$$r = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

5. **Calculer l'aire du triangle ABC .**

Puisque ABC est rectangle en A on a :

$$Aire(ABC) = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{40}}{2} = 10 \text{ u.a.}$$

6. **Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC . Calculer la longueur AH .**

- D'une part, on a montré que : $Aire(ABC) = 10$ u.a.
- D'autre part, en considérant la base $[BC]$ associée à la hauteur $[AH]$ on a :

$$Aire(ABC) = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{\sqrt{50} \times AM}{2} \text{ u.a.}$$

On peut donc écrire que :

$$AH = \frac{2 \times Aire(ABC)}{\sqrt{50}} = \frac{2 \times 10}{\sqrt{50}}$$

$$AH = \frac{20}{\sqrt{50}} = \frac{20\sqrt{50}}{50} = \frac{2}{5} \times \sqrt{50} = \frac{2}{5} \times 5\sqrt{2}$$

$$AH = 2\sqrt{2}$$

