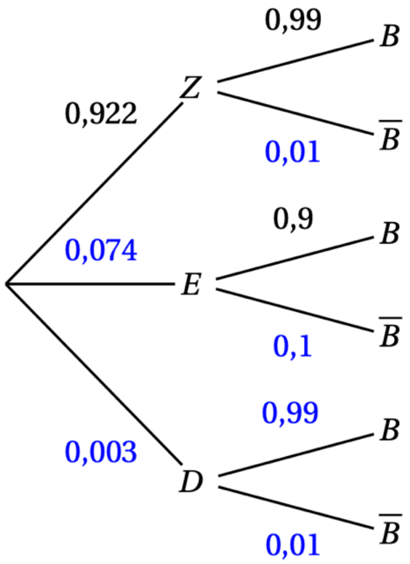
CONTROLE TS TRIMESTRE 2 DUREE 3H CORRIGE

EXERCICE 1

1)



2. La probabilité demandée est $P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B) = 0{,}075 \times 0{,}9 = 0{,}0675$.

3. D'après la loi des probabilités totales :
$P(B) = P(Z \cap B) + P(E \cap B) + P(D \cap B) = 0{,}922 \times 0{,}99 + 0{,}074 \times 0{,}9 + 0{,}003 \times 0{,}99 = 0{,}98325$ soit $0{,}9833$ à 10^{-4} près.

EXERCICE 2

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x.$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -1 + \mathrm{e}^x$.
   Or, $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.

   Ainsi, on a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2. Le minimum de g sur $\mathbb{R}$ vaut 2, donc g est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ en restant positif, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = +\infty$.

   Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = -\infty$ et, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = -\infty$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.

   Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = +\infty$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $f'(x) = 1+\dfrac{1\times\mathrm{e}^x - x\times\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = 1+\dfrac{(1-x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = 1+(1-x)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x+1-x) = \mathrm{e}^{-x}(1-x+\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{-x}g(x)$.

3.

x	$-\infty$	$+\infty$
e^{-x}	$+$	
$g(x)$	$+$	
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4. (a)
   - f est continue sur $[-1;0]$ car dérivable sur $\mathbb{R}$,
   - f est strictement croissante sur $[-1;0]$,
   - $f(-1) = -\mathrm{e}$ et $f(0) = 1$, donc, $0 \in [f(-1); f(0)]$

   donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[-1;0]$.

   (b) $\alpha \in [-0,41; 0,40]$

   (c)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

5. (a) $f(0) = 0+1+\dfrac{0}{\mathrm{e}^0} = 1$ et $f'(0) = \mathrm{e}^{-0}g(0) = 2$, donc T a pour équation : $y = f'(0)(x-0)+f(0) = 2x+1$.

   (b) On étudie le signe de $f(x)-(2x+1) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - x = x(\mathrm{e}^{-x}-1)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$\mathrm{e}^{-x}-1$		$+$	0	$-$	
$f(x)-(2x+1)$		$-$	0	$-$	

   $\mathrm{e}^{-x}-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} \geqslant \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow -x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$

   $\mathcal{C}$ est donc en dessous de sa tangente T au point d'abscisse 0.

EXERCICE 3
PARTIE A

Soient les deux nombres complexes : $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}\,\mathrm{i}$. On pose : $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. On calcule la forme algébrique de Z.

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1-\mathrm{i}}{-8-8\sqrt{3}\mathrm{i}} = \frac{(1-\mathrm{i})\left(-8+8\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)}{\left(-8-8\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)\left(-8+8\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)} = \frac{-8+8\sqrt{3}\mathrm{i}+8\mathrm{i}+8\sqrt{3}}{64+192}$$
$$= \frac{-8+8\sqrt{3}}{256} + \mathrm{i}\,\frac{8+8\sqrt{3}}{256} = \frac{-1+\sqrt{3}}{32} + \mathrm{i}\,\frac{1+\sqrt{3}}{32}$$

2. On écrit z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

- $|z_1| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$; $z_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ donc $-\dfrac{\pi}{4}$ est un argument de z_1
  La forme exponentielle de z_1 est $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
- $|z_2| = \sqrt{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2} = \sqrt{256} = 16$; $z_2 = 16\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc $-\dfrac{2\pi}{3}$ est un argument de z_2.
  La forme exponentielle de z_2 est $16\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

4. En comparant la forme algébrique et la forme trigonométrique de Z, on obtient :

$$\frac{\sqrt{2}}{16}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{32} \iff \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{16}{\sqrt{2}} \times \frac{-1+\sqrt{3}}{32} \iff \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$
$$\iff \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \iff \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

PARTIE B

1.

$|z+\mathrm{i}| = |z-1| \Leftrightarrow |z - z_{\mathrm{D}}| = |z - z_{\mathrm{A}}| \Leftrightarrow \mathrm{D}M = \mathrm{A}M$ si M est le point d'affixe z. L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment [AD].
Comme ABCD est de manière évidente un carré, c'est aussi la médiatrice du segment [BC]. (réponses

2.

. On doit avoir $z \neq -1$.
$\dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z+1}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MC}\,;\,\overrightarrow{MD}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$. On obtient le cercle de diamètre [CD], privé
Du point C réponse 1

3.

$\arg(z-\mathrm{i}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \arg\left(z_{\overrightarrow{BM}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{BM}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.
$\arg(z-\mathrm{i})$ n'existe que si $z \neq \mathrm{i}$, donc $M \neq \mathrm{B}$.
On obtient la demi-droite]BD]. (réponse 3)

EXERCICE 4

Partie A

1. La fonction est la somme des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x - 3$, toutes deux strictement croissantes sur $]0\,;\,+\infty[$, elle est donc strictement croissante sur cet intervalle.

2. Remarquons que la fonction ln conserve les inégalités strictes puisqu'elle est strictement croissante.
Calculons $u(2) = \ln(2) - 1$ or $\ln(2) < \ln(\mathrm{e}) = 1$ car $\mathrm{e} > 2$. On prouve ainsi que $u(2) < 0$.
D'autre part, $u(3) = \ln(3)$ or $\ln(3) > \ln(1) = 0$ car $3 > 1$, ce qui montre que $u(3) > 0$.
Notons également que u est continue comme somme de fonctions continues.
Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème des valeurs intermédiaires.
0 possède ainsi un antécédent par u dans l'intervalle $[2\,;\,3]$. Comme u est strictement monotone sur $]0\,;\,+\infty[$, cet antécédent α est unique sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. Compte-tenu du sens de variation de u, on a :

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	||	-	0	+	

Partie B

1. Nous savons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$. Par opérations sur les limites, on en déduit que :
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$

2. a. f est dérivable sur $]0;\,+\infty[$ comme sommes et produits de fonctions dérivables sur $]0;\,+\infty[$.
Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}. \text{ En réduisant au dénominateur } x^2 : \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2 + x - 1) \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) + x - 3) \\ &= \frac{1}{x^2}u(x) \end{aligned}$$

b. Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$. Ainsi le signe de f' est celui de u. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0\,;\,\alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha\,;\,+\infty]$.