CONTROLE TS 120219 CORRIGE

EXERCICE 1

PARTIE A

1) $f(-1+i\sqrt{3}) = (-1+i\sqrt{3})^2 + 2(-1+i\sqrt{3}) + 9$
$= 1 - 2i\sqrt{3} - 3 - 2 + 2i\sqrt{3} + 9$
$= 5$

2) $f(z) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + 2z + 9 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + 2z + 4 = 0$
$\Delta = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$ donc $\Delta < 0$ deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$$

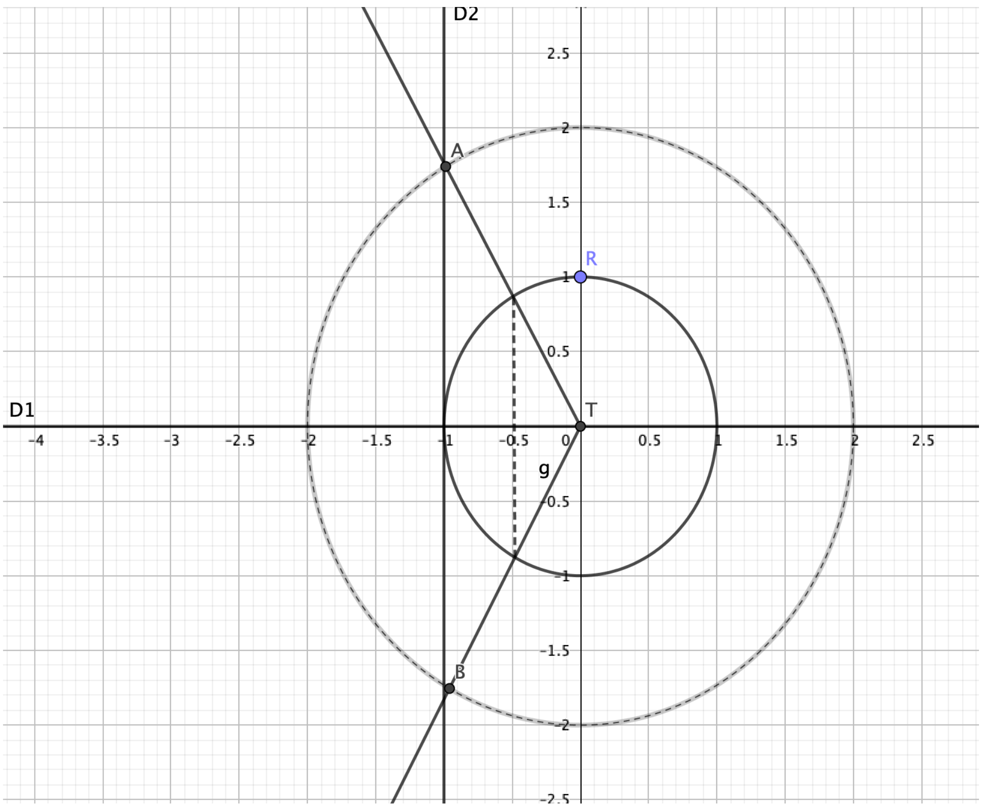
On détermine la forme exponentielle de z_1 puis on déduit celle de z_2 comme conjuguée de la 1re.

$$|z_1| = \sqrt{1+3} = 2 \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{2\pi}{3} \ [2\pi] \quad z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ d'où } z_2 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

3) a) $f(z) = (x+iy)^2 + 2(x+iy) + 9 = x^2 + 2ixy - y^2 + 2x + 2iy + 9 = (x^2 - y^2 + 9) + i(2xy + 2y)$

b) $f(z) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad 2xy + 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$ ou $x = -1$

L'ensemble (E) est donc la réunion de la droite horizontale D_1 d'équation $y = 0$ (l'axe des réels) et de la droite verticale D_2 d'équation $x = -1$



PARTIE B

1) **Réponse d)** car $i\,\dfrac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times \dfrac{\sqrt{6}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}\,e^{i\frac{13\pi}{12}}$

2) **Réponse c)** car en posant $z = x + iy$, on a :

$$-z = \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad -x - iy = x - iy \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

L'ensemble solution est l'axe des ordonnées (z imaginaire pur).

3) **Réponse a)** en posant A$(-i)$ et B(i), on a : $|z+i| = |z-i| \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{A}M = \mathrm{B}M$

L'ensemble des points M est donc la médiatrice de [AB] qui n'est autre que la droite des abscisses.

EXERCICE 2

Partie A

1) La fonction u est dérivable sur $]0,+\infty[$ car somme de fonctions dérivables.

$u'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$. u' est la somme de deux nombres positifs sur $]0,+\infty[$, $u'(x) > 0$. La fonction u est donc croissante sur $]0,+\infty[$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - 2 = -2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} u(x) = -\infty \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - 2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = +\infty \end{array}$$

2) a) La fonction u est continue (car dérivable) et strictement monoto
]0, +∞[. De plus $0 \in u(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$, donc d'après le théo
intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in]0,+\infty[$ tel que $u(\alpha) = 0$.

b) On trouve : $1,31 < \alpha < 1,32$

3) Comme la fonction u est croissante sur $]0,+\infty[$, on a :

- Si $0 < x < \alpha$ $u(x) < 0$
- Si $x > \alpha$ $u(x) > 0$

4) On sait que $u(\alpha) = 0$ donc $\alpha^2 - 2 + \ln\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\alpha = 2 - \alpha$

Partie B

1) On a :

$$f'(x) = 2x + 2\left(-\frac{1}{x}\right)(2 - \ln x) = \frac{2x^2 - 4 + 2\ln x}{x} = \frac{2u(x)}{x}$$

2) Pour $x \in]0,+\infty[$ $f'(x)$ est du signe de $u(x)$. On a alors la tableau de variation suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

1) Limite de f en $-\infty$: $f(x) = \dfrac{xe^x}{e} + 1$

or $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ donc, par quotient et somme, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

On en déduit que C admet une asymptote horizontale d'équation : $y = 1$

2) Limite de f en $+\infty$. Pas de forme indéterminée, par produit, quotient et somme de limites, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3) $f'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1} = (x+1)e^{x-1}$

4) Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x-1} > 0$, on a :

- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$
- Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x+1)$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1 - e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente particulière

1) La tangente à C en a : T_a a pour équation :

$$
\begin{aligned}
y &= f'(x)(x-a) + f(a) \\
&= (a+1)e^{a-1}(x-a) + ae^{a-1} + 1 \\
&= (a+1)e^{a-1}\, x + a(1-a-1)\, e^{a-1} + 1 \\
&= (a+1)e^{a-1}\, x - a^2\, e^{a-1} + 1
\end{aligned}
$$

On pose $b = -a^2\, e^{a-1} + 1$

2) T_a passe par l'origine si, et seulement si, l'équation de la droite T_a a son ordonnée à l'origine b nulle. On a donc : $1 - a^2\, e^{a-1} = 0$

3) On pose la fonction g définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = -x^2\, e^{x-1} + 1$

On étudie la fonction g sur $[0;+\infty[$. on a :

$$g'(x) = -2xe^{x-1} - x^2\, e^{x-1} = -x(x+2)\, e^{x-1}$$

or si $x > 0$, $x + 2 > 0$ et $e^{x-1} > 0$ donc $g'(x) < 0$

g est donc strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. On a : $g(0) = 1$ et :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} -x^2 &= -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} e^{x-1} &= +\infty \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{Par produit et somme} \\ &\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{aligned}$$

On a donc : $g(]0;+\infty[) =]-\infty;1[$

*corollaire

La fonction g est continue (car dérivable), monotone (décroissante) et $0 \in g(]0;+\infty[)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution sur $]0;+\infty[$ à l'équation $g(x) = 0$.

or $g(1) = 0$ donc 1 est l'unique solution de $g(x) = 0$ sur $]0,+\infty[$.

4) On a l'équation T_1 : $y = 2x$