CONTROLE N°2 T2 DUREE : 1 H

Exercice 1. (inspiré de l'ex 84 p 248 , corrigé non détaillé)

1°) $z_A = 2\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et. $Z_B = 2\, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

2°)

$$z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\ ;$$

3°)

$$|z_I| = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,.$$

$$z_I = |z_I|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}} = |z_I|\left(\cos\frac{3\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8}\right).$$

$$\text{Par suite, } \cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\operatorname{Re} z_I}{|z_I|} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{et } \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\operatorname{Im} z_I}{|z_I|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Exercice 2

1. On a $\Delta = 36 - 40 = -4 = (2\mathrm{i})^2$. L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{6+2\mathrm{i}}{2} = 3+\mathrm{i} \quad \text{et} \quad 3-\mathrm{i}.$$

Ou bien : $z^2-6z+10=0 \iff (z-3)-9+10=0 \iff (z-3)^2+1=0 \iff (z-3)^2-\mathrm{i}^2 = 0 \iff (z-3-\mathrm{i})(z-3+\mathrm{i})$ et l'on retrouve les deux solutions.

2. a. $P(6) = 6^3 - 12\times 6^2 + 46\times 6 - 60 = 216 - 432 + 276 - 60 = 492 - 492 = 0$. On peut donc factoriser $P(z)$ par $z-6$.

b. $P(z) = (z-6)\left(az^2+bz+c\right) \iff z^3-12z^2+46z-60 = (z-6)\left(az^2+bz+c\right) \iff z^3-12z^2+46z-60 = az^3+bz^2+cz-6az^2-6bz-6c \iff z^3-12z^2+46z-60 = az^3+(b-6a)z^2+(c-6b)z-6c \iff \begin{cases} a &= 1\\ b-6a &= -12\\ c-6b &= 46\\ -6c &= -60\end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1\\ b &= -6\\ c &= 10\\ c &= 10\end{cases}$

Remarque : ds le contrôle
a = -6 et b = 10

On a donc

$$P(z) = z^3-12z^2+46z-60 = (z-6)\left(z^2-6z+10\right).$$

c. $P(z) = 0 \iff (z-6)\left(z^2-6z+10\right) = 0$. Les solutions sont donc $z=6$ et les solutions de l'équation de la question 1.

$$S = \{6\ ;\ 3+\mathrm{i}\ ;\ 3-\mathrm{i}\}$$

3. Voir plus bas

4. Le milieu de [OC] a pour coordonnées (3 ; 0) ;

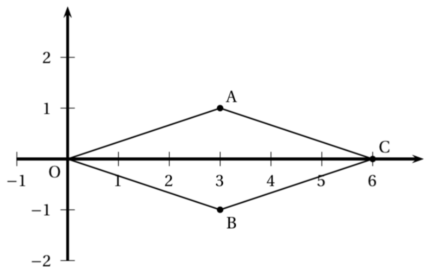
Celui de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{3+3}{2}\ ;\ \frac{1-1}{2}\right) = (3\ ;\ 0)$.

[OC] et [AB] ont le même milieu : le quadrilatère OACB est un parallélogramme .

5. $\mathrm{OA} = |3+\mathrm{i}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$;

$\mathrm{OB} = |3-\mathrm{i}| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$.

Le quadrilatère OACB a deux côtés consécutifs de même longueur : c'est un losange.



<u>Exercice 3</u>

Correction ex 61 P 578