CONTROLE DE MATHS TS LE 15/02/19 DUREE : 3H

Exercice 1 (7 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

PARTIE A

On note C l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité est de 2 cm sur chaque axe. Le graphique sera complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2 + 2z + 9$

1-Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f.
a)Résoudre dans C l'équation $f(z) = 5$.
b)Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
c)Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont les affixes sont solutions de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive). On laissera les traits de construction apparents.
2- Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.
a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est $x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y)$
b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.

PARTIE B

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre ou trois propositions est exacte. Une réponse ***exacte*** *rapporte 1 point ; une réponse* ***inexacte*** *enlève 0,5 point ; l'****absence*** *de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

1) Soit $z_1 = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $i\dfrac{z_1}{z_2}$ est :
   a) $\sqrt{3}e^{i\frac{19\pi}{12}}$ b) $\sqrt{12}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ c) $\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ d) $\sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}$
2) L'équation $-z = \bar{z}$, d'inconnue complexe z, admet :
   a) une solution
   b) deux solutions
   c) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.
   d) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.
3) Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z + i| = |z - i|$.
   a) Γ est l'axe des abscisses.

   b) Γ est l'axe des ordonnées.
   c) Γ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.

Exercice 2 (6 points)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$

1) Étudier les variations de u sur $]0\ ;\ +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2) a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   On note α cette solution.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4) Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$
On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1) Exprimer, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2) En déduire les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 3 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x-1} + 1$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude de la fonction

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x : $f'(x) = (x + 1)e^{x-1}$.
4) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe C au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1) On appelle T_a la tangente à C au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2) Démontrer qu'une tangente à C en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2e^{a-1} = 0.$$

3) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2e^{x-1} = 0.$$

4) Donner alors une équation de la tangente recherchée.