CONTROLE DE MATHS N°1 TRIM 2 DUREE : 3 H CORRIGE

Exercice 1 (4 points)

Pour les dessins voir annexe

1°)2°) $|z_A| = \sqrt{9+27} = 6$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{1}{2}\\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\ \theta = -\frac{\pi}{3}\ (2\pi).\ \text{Donc}\quad z_A = 6\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$|z_B| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\ \theta = -\frac{3\pi}{4}\ (2\pi).\ \text{Donc}\quad z_B = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$|z_C| = \sqrt{12+4} = 4$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{1}{2}\end{array}\right\}\ \theta = \frac{\pi}{6}\ (2\pi).\ \text{Donc}\quad z_B = 4\, e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$|z_D| = 4$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = 0\\ \sin\theta = 1\end{array}\right\}\ \theta = \frac{\pi}{2}\ (2\pi).\ \text{Donc}\quad z_D = 4\, e^{i\frac{\pi}{2}}$$

b) 3°)a) $z_I = \frac{z_B + z_D}{2} = -1 + i$

b) le quadrilatère BADE étant un parallélogramme les diagonales $[BD]$ et $[AE]$ ont le même milieu donc $z_I = \frac{z_A + z_E}{2}$ soit $z_A + z_E = -2 + 2i$ et $z_E = -5 + (2 + 3\sqrt{3})i$

Exercice 2 (5 points)

Partie A : propriétés du nombre j

1. **a.** On résout l'équation : $z^2+z+1=0$; $\Delta=-3<0$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

   b. $\mathrm{j}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=z_1$ donc j est solution de l'équation $z^2+z+1=0$.

2. $|\mathrm{j}|^2=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1$ donc $|\mathrm{j}|=1$

   $\mathrm{j}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; on cherche θ tel que $\left\{\begin{array}{lcl}\cos\theta&=&-\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta&=&\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$ Donc $\theta=\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

   La forme exponentielle de j est donc : $\mathrm{j}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

3. **a.** $\mathrm{j}^3=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^3=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi\times 3}{3}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 2\pi}=1$

   b. j est solution de l'équation $z^2+z+1=0$ donc $\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1=0$ et donc $\mathrm{j}^2=-1-\mathrm{j}$.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.

   P a pour affixe 1 ; Q a pour affixe $\mathrm{j}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et R pour affixe $\mathrm{j}^2=-1-\mathrm{j}=-1+\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   $\mathrm{PQ}^2=\left|-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right|^2=\left|-\dfrac{3}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}=3\Longrightarrow \mathrm{PQ}=\sqrt{3}$

   $\mathrm{QR}^2=\left|-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|2=\left|-\mathrm{i}\sqrt{3}\right|^2=3\Longrightarrow \mathrm{QR}=\sqrt{3}$

   $\mathrm{RP}^2=\left|1+\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\left|\dfrac{3}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}=3\Longrightarrow \mathrm{RP}=\sqrt{3}$

   PQ = QR = RP donc le triangle PQR est équilatéral.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a+\mathrm{j}b+\mathrm{j}^2c=0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. On sait que $a+b\,\mathrm{j}+c\,\mathrm{j}^2=0$ donc $a=-\mathrm{j}b-\mathrm{j}^2c$.
   Or, d'après la question **A. 3. b.**, $\mathrm{j}^2=-1-\mathrm{j}$ donc :
   $a=-\mathrm{j}b-\mathrm{j}^2c=-\mathrm{j}b-(-1-\mathrm{j})c=-\mathrm{j}b+c+\mathrm{j}c \iff a-c=\mathrm{j}(c-b)$
2. $a-c=\mathrm{j}(c-b)\Longrightarrow |a-c|=|\mathrm{j}(c-b)| \iff |a-c|=|\mathrm{j}|\times|c-b|$
   On a vu précédemment que $|\mathrm{j}|=1$; de plus $|a-c|=\mathrm{AC}$ et $|c-b|=\mathrm{BC}$.
   On a donc démontré que AC = BC.
3. On sait que $a=-\mathrm{j}b-\mathrm{j}^2c$. On sait aussi que $\mathrm{j}^2=-1-\mathrm{j}$ donc $\mathrm{j}=-1-\mathrm{j}^2$.
   On a donc $a=-(-1-\mathrm{j}^2)b-\mathrm{j}^2c=b+\mathrm{j}^2b-\mathrm{j}^2c$ ce qui équivaut à $a-b=\mathrm{j}^2(b-c)$.
4. On sait que $|\mathrm{j}|=1$ donc $|\mathrm{j}^2|=|\mathrm{j}|^2=1$. De plus $|a-b|=\mathrm{AB}$ et $|b-c|=\mathrm{CB}$.
   On a vu dans la question précédente que $a-b=\mathrm{j}^2(b-c)$ ce qui entraîne $|a-b|=|\mathrm{j}^2(b-c)|$ ou encore $|a-b|=|\mathrm{j}^2|\times|b-c|$. Cette dernière égalité équivaut à AB = CB.
   Comme AC = BC et AB = CB, on a démontré que le triangle ABC était équilatéral.

Exercice 3(2 points)

QCM Donner la seule réponse exacte parmi les trois proposées.

1 Pour tout $x \neq 0$, l'expression $\dfrac{e^{2x} - e^x}{e^x + 1}$ est aussi égale à :

a) $\dfrac{e^x - 1}{1 - e^x}$; b) $\dfrac{e^x - 1}{1 + e^{-x}}$; c) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

2 L'équation $e^{x^2 - x - 1} = e^{3x-4}$ a pour solutions :

a) $x = 1$ et $x = -3$; b) $x = -1$ et $x = 3$; c) $x = 1$ et $x = 3$.

3 La limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de $e^x - 2x$ est :

a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 0.

4 La dérivée de la fonction f définie, pour tout réel x, par $f(x) = xe^{-2x}$ est :

a) $f'(x) = 2xe^{-2x}$; b) $f'(x) = (2x - 1)e^{-2x}$; c) $f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$.

Exercice 4 (3 points)

1) • En $+\infty$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x - 5 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\}$ Par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) a) $f'(x) = e^x + (x - 5)e^x = e^x(1 + x - 5) = (x - 4)e^x$.

b) Comme la fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$:

f '(x) est du signe de $x - 4$ sur I , on en déduit le tableau de variations de f sur I :

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	-5	$\searrow$	$-e^4$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 5 (5 points)

Soit f la fonction définie sur |R par f(x)= $\sin^2 x + 2\cos x$.

1°) a) Pour tout réel x, $f(-x) = \sin^2(-x) + 2\cos(-x) = (-\sin x)^2 + 2\cos x = f(x)$.

b) Pour tout réel x, $f(x + 2\pi) = \sin^2(x + 2\pi) + 2\cos(x + 2\pi) = \sin^2 x + 2\cos x = f(x)$.

2°)a) $f'(x) = 2\sin x \cos x - 2\sin x = 2\sin x(\cos x - 1)$

b) Comme $\sin x \geq 0$ pour tout x de I alors $f'(x)$ est du signe de $\cos x - 1$. Or pour tout réel x on sait que $\cos x \leq 1$ soit $\cos x - 1 \leq 0$. on en déduit que $f'(x) \leq 0$
pour tout x de I et. Le tableau de variation suivant :

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	2	$\searrow$	-2

3°) a) Equation de la tangente To à C au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$:

$y = f'(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) + f(\frac{\pi}{2})$

$y = -2(x - \frac{\pi}{2}) + 1$

$y = -2x + \pi + 1$

b) Equation de la tangente T_1 à C au point d'abscisse $\frac{\pi}{3}$.

$y = f'(\frac{\pi}{3})(x - \frac{\pi}{3}) + f(\frac{\pi}{3})$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{7}{4}$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{21+\pi\sqrt{3}}{12}$

ANNEXE