CONTROLE DE SPECIALITE MATHS TERMINALE. TRIMESTRE 2 . DUREE : 2H

EX 1

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,000 1 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :

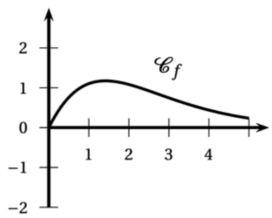
M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

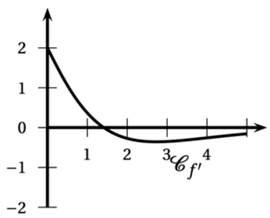
1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?

Ex 2

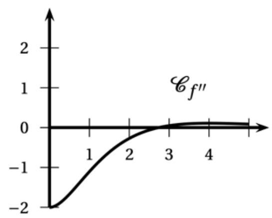
Partie A



Courbe $\mathscr{C}_f$



Courbe $\mathscr{C}_{f'}$



Courbe $\mathscr{C}_{f''}$

On donne ci-dessus la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative dans un repère donné d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 5]$ ainsi que les courbes représentatives $\mathscr{C}_{f'}$ et $\mathscr{C}_{f''}$ respectivement de la dérivée f' et de la dérivée seconde f'' de la fonction f.

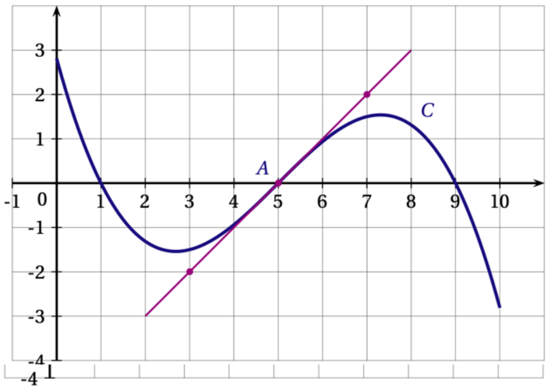
Dans cette partie les réponses seront obtenues à l'aide de lectures graphiques.

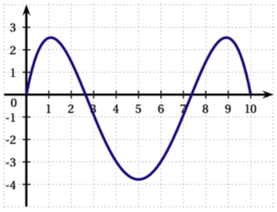
1. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs du nombre réel pour lequel la fonction f semble atteindre son maximum.
2. a. Donner un intervalle défini par deux entiers sur lequel la fonction f semble convexe.
   b. Expliquer pourquoi on peut conjecturer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.
   Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de l'abscisse de ce point d'inflexion.
3. Parmi les équations suivantes quelle est l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?

$y = x$ $\quad\quad$ $y = 2x + 1$ $\quad\quad$ $y = 2x$ $\quad\quad$ $y = \dfrac{3}{4}x$

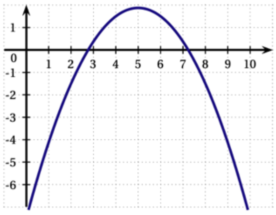
Partie B

On donne ci-contre la représentation graphique C d'une fonction f définie sur $[0\,;\,10]$.
La tangente à la courbe C au point A d'abscisse 5 est tracée.
Parmi les quatre courbes ci-dessous, déterminer laquelle représente graphiquement la fonction dérivée f' de la fonction f.

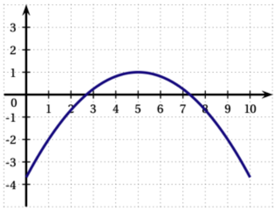




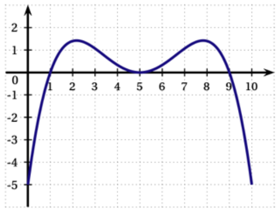
a. Courbe 1



b. Courbe 2



c. Courbe 3



d. Courbe 4

Ex 3
PROPOSITION A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$.

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f.
   b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = f(x) - x.$$

On admet que $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$

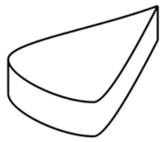
a. Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.

b. Montrer que sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2\,;\,3]$.

c. À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $\mathscr{D}$.

PROPOSITION B

La chocolaterie Delmas décide de commercialiser de nouvelles confiseries : des palets au chocolat en forme de goutte d'eau.
Pour cela, elle doit fabriquer des moules sur mesure qui doivent répondre à la contrainte suivante : pour que cette gamme de bonbons soit rentable, la chocolaterie doit pouvoir en fabriquer au moins 80 avec 1 litre de pâte liquide au chocolat.

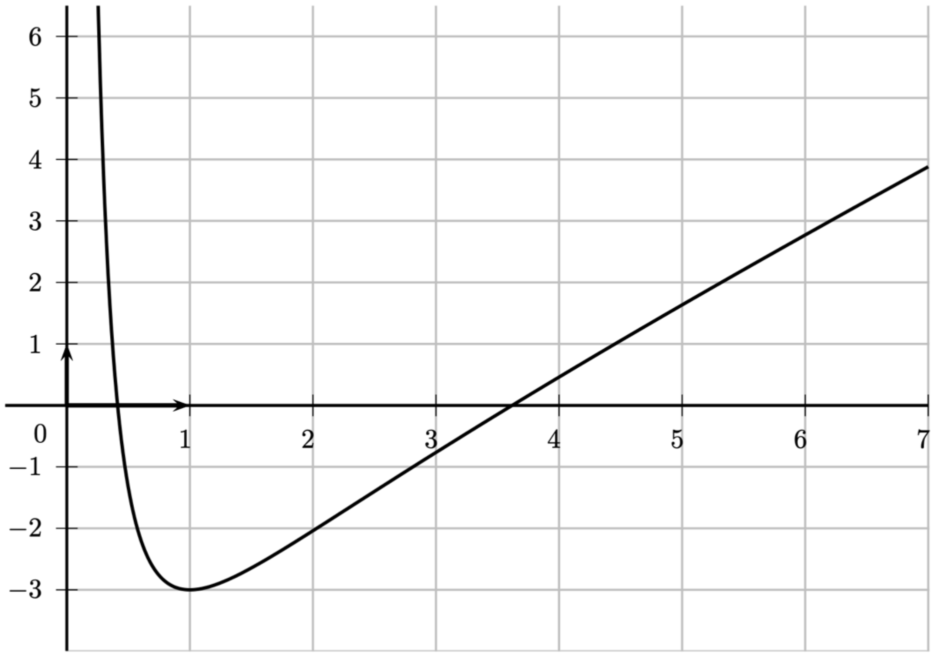


Partie A : modélisation par une fonction

Le demi contour de la face supérieure du palet sera modélisé par une portion de la courbe de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3\ln x}{x}.$$

La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous.



Le repère est orthogonal d'unité 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1) Soit φ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = x^2 - 1 + 3\ln x.$$

a) Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.

b) Etudier les variations de φ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.

2) a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Montrer que sur $]0\ ;\ +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.
En déduire le tableau de variation de f.

c) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,1]$.
Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
On admettra que l'équation $f(x) = 0$ a également une unique solution β sur $[1\ ;\ +\infty[$ avec $\beta \approx 3,61$ à 10^{-2} près.