Durée : 4 heures
Vendredi 21 Décembre 2018

Lycée Gerville-Réache
Basse-Terre

Bac Blanc n°1 2018-2019
Série S
Mathématiques

Tous les résultats ou affirmations doivent être soigneusement justifiés.

LA QUALITE DE LA REDACTION, LA CLARTE ET LA PRECISION DES RAISONNEMENTS ENTRERONT POUR UNE PART IMPORTANTE DANS L'APPRECIATION DES COPIES.

EXERCICE 1 (4 points) : QCM

- Reproduire sur votre copie le tableau ci-dessous.
- Indiquer pour chaque question la (ou les) bonne(s) réponse(s).
- Aucune justification n'est demandée.

Question	Réponses correctes			
1				
2				
3				
4				
5				

1. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[-2; 6]$ telle que $f(-2) = 3$ et $f(6) = -4$.
   a) L'équation $f(x) = -3$ a au moins une solution dans l'intervalle $[-2; 6]$.
   b) 0 a au moins un antécédent par f .
   c) La fonction f est décroissante sur $[-2; 6]$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 9$.
   On considère les fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$ et $h(x) = f^3(x)$.
   a) $g'(x) = \sqrt{4x^3 - 6x^2 + 1}$ b) $g'(x) = \frac{4x^3-6x^2+1}{2\sqrt{x^4-2x^3+x-9}}$
   b) c) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^4-2x^3+x-9}}$ $d)$ $h'(x) = 3(4x^3 - 6x^2 + 1)^2$
   e) $h'(x) = 3(x^4 - 2x^3 + x - 9)^2$ f) $h'(x) = 3(4x^3 - 6x + 1)(x^4 - 2x^3 + x - 9)^2$

3. L'écriture algébrique du nombre complexe $z = \frac{1-i}{1+i}$ est :
   a) i b) $-i$ c) $\frac{1}{i}$ d) $-\frac{1}{i}$

4. Une solution de l'équation $2z + \overline{z} = 9 + i$ est :
   a) $18 - i$ b) i c) $3 + i$

5. Pour tout nombre complexe z, $(z - i)(\overline{z} + i)$ est :
   a) un réel b) un imaginaire pur c) un nombre complexe ni réel, ni imaginaire pur

EXERCICE 2 (4 points) : Nombres complexes

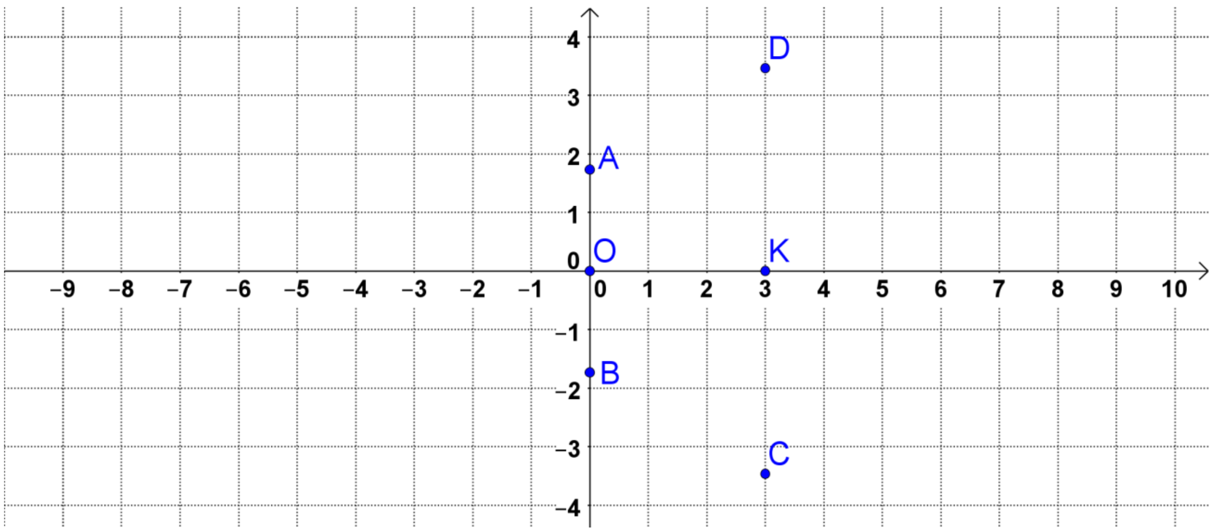
On considère le polynôme P défini par :

$$P(Z) = Z^4 - 6Z^3 + 24Z^2 - 18Z + 63 .$$

1) Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout $Z \in \mathbb{C}$, on ait :
$P(Z) = (Z^2 + 3)(Z^2 + aZ + b)$

2) En déduire, les solutions dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ de l'équation :
$P(Z) = 0$

3) On a placé ci-dessous dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm), les points A, B, C, D et K d'affixes respectives $Z_A = i\sqrt{3}$, $Z_B = -i\sqrt{3}$, $Z_C = 3 - 2i\sqrt{3}$, $Z_D = \overline{Z_C}$ et $Z_K = 3$.



a) Démontrer que le triangle A C D est un triangle rectangle.
b) Calculer l'aire du triangle A C D

4) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle, dont on Précisera le centre et le rayon.

5) On note E le symétrique de D par rapport au point O.
a) Calculer l'affixe du point E.
b) Montrer que le triangle A C E est équilatéral.

EXERCICE 3 (6 points) : Suites : Evolution d'une population.

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce de pingouins dans une réserve protégée.
Cette population est estimée à **12 000 individus en 2016**. Les contraintes du milieu naturel (nourriture et espace disponible) font que la population **ne peut pas dépasser les 60 000 individus**.

Partie A : un premier modèle
Dans une première approche, le biologiste prévoit que la population va croître régulièrement de 5 % par an. Il note (v_n) la population, *exprimée en milliers d'individus*, l'année $2016 + n$.
On a donc $v_0 = 12$.

1) Calculer les populations v_1 et v_2 correspondant respectivement aux années 2017 et 2018.
2) Expliquer pourquoi on peut affirmer que pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 1{,}05v_n$
3) Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
4) Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ? Justifier votre réponse.

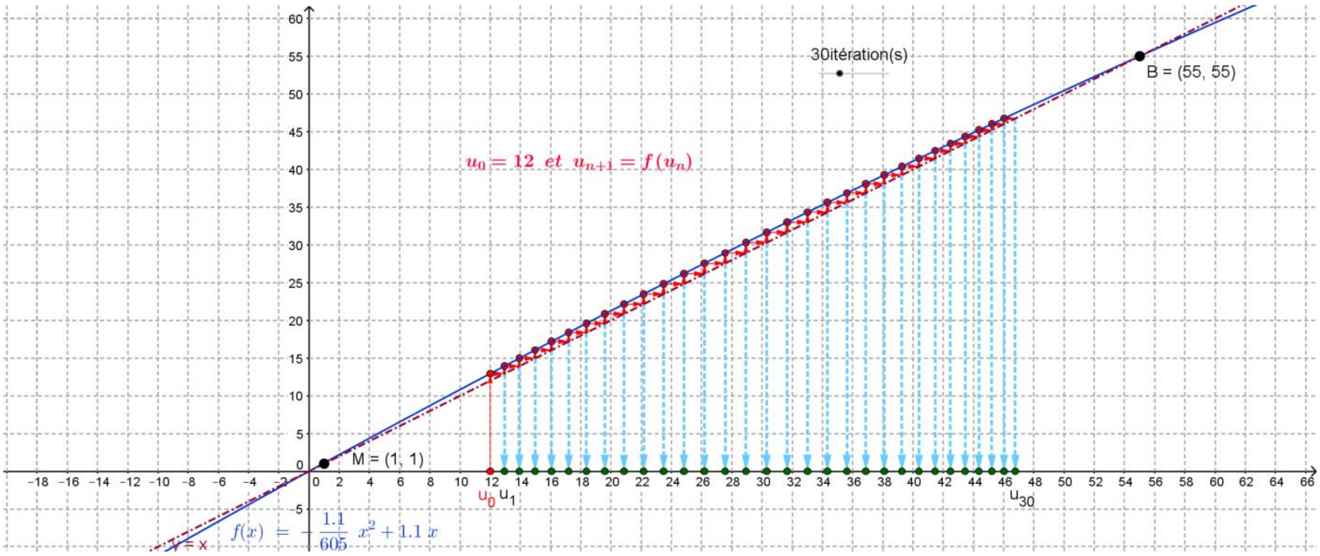
Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise dans une seconde approche, l'évolution annuelle de la population de pingouins par une autre suite notée (u_n) définie pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = -\frac{1{,}1}{605}(u_n)^2 + 1{,}1u_n.$$

Ainsi, la suite (u_n) vérifie pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1{,}1}{605}x^2 + 1{,}1x$.

On a représenté ci-dessous, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, les 30 premiers termes de la suite (u_n).



1) Que conjecturez-vous à propos du sens de variation de la suite (u_n) ?
2) A votre avis, la suite (u_n) va-t-elle converger ou diverger ?
3) On va maintenant chercher à prouver les conjectures ci-dessus.
   Justifier que f est croissante sur $[0; 60]$.
4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
5) A l'aide de la question n°3, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a
$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 55.$$
6) Déduire de la question précédente que la suite (u_n) converge (justifier votre réponse).
7) On admet que la limite l de la suite (u_n) vérifie $l = f(l)$. Déterminer la valeur de l.
8) Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ? Justifier votre réponse.

Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population de pingouins dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.

Il utilise l'algorithme suivant :

Variables	n un entier naturel
	u un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0 u prend la valeur 12 **Tant Que** .... u prend la valeur .... n prend la valeur .... **Fin Tant Que**
Sortie	Afficher ....

Compléter sur votre feuille les 4 lignes incomplètes de cet algorithme (avec des pointillés), afin qu'il affiche le plus petit entier r de telle sorte que $U_r \geq 50$.

EXERCICE 4 (6 points) : Etude de deux fonctions numériques

1. Etude d'une fonction auxiliaire g.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g\,(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$.

1) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [-1; 0]$.

4) Donner un encadrement de α à 10^{-3} près.

5) Déterminer le signe de g suivant les valeurs de x.

2. Etude d'une fonction f.

On considère maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \frac{2}{x^2+1}$

6) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

7) Déterminer la dérivée de f et montrer que : $f'(x) = \frac{(x+1)\,g(x)}{(x^2+1)^2}$.

8) A l'aide d'un tableau de signe, étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f.

3. Tracé de la Courbe C_f et d'une tangente.

9) Donner l'équation de la tangente T à la courbe représentative C_f de f au point d'abscisse $x = 1$.

10) Tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2cm, la droite T ainsi que la courbe représentative C_f de f.

11) ***Question facultative hors barème*** (1 point au-delà des 20 points du barème, *uniquement pour ceux qui ont terminé tout le devoir et qui en veulent encore* ...) :

Etudier sur $\mathbb{R}$ la position relative de la courbe C_f par rapport à la tangente T.