LA FONCTION LN

I) Définition et propriétés

1°) Définition

La fonction définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ dont la dérivée est $\dfrac{1}{x}$ et qui vaut 0 en 1 est la fonction logarithme népérien notée ln on a : $\ln :]0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \to \ln x$

Remarque : On définit ln aussi en disant que c'est la primitive de $\dfrac{1}{x}$ qui vaut 0 en 1

2°) Conséquences immédiates

- $\ln x$ est défini si x est strictement positif
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
- $\ln 1 = 0$

II Formules fondamentales

Pour tous réels a et b strictement positifs

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

Exemples : $\ln 6 = \ln 2.3 =$; $\ln 2x =$

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

Exemples : $\ln \dfrac{1}{3} =$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

Exemples : $\ln \dfrac{3}{4} =$; $\ln x - \ln (x^2 + 1) =$ avec $x \in]0 ; +\infty[$

$$\boxed{\ln a^p = p \ln a}$$ où p est un entier relatif

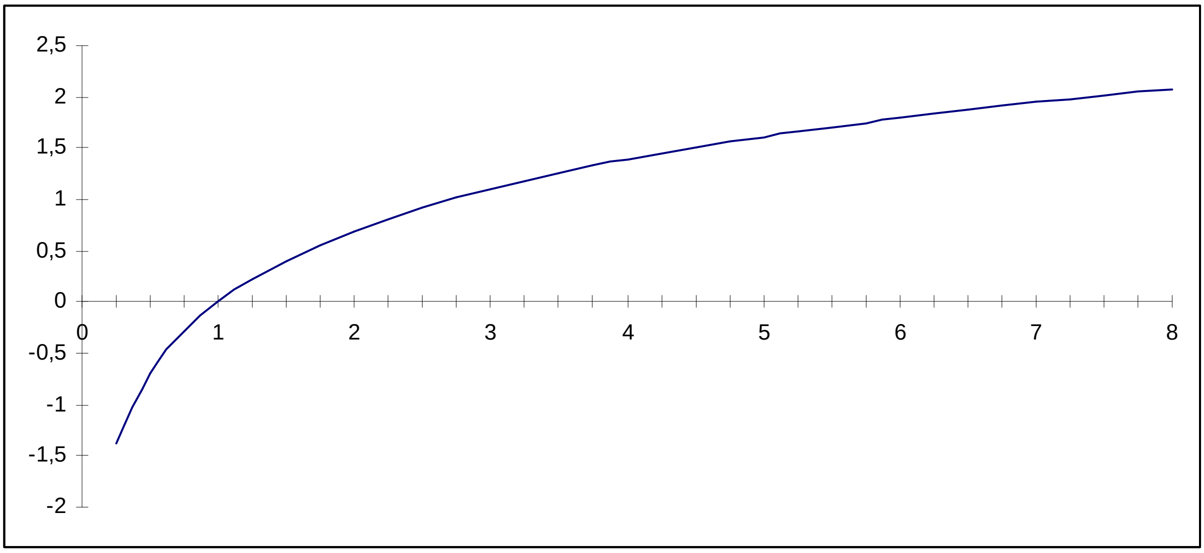
Exemples : $\ln 8 =$; $\ln 27 =$; $2 \ln (x + 1) =$ avec $x \in \,]\, 1 \,;\, +\infty \,[$

$$\boxed{\ln \sqrt{a} = \tfrac{1}{2} \ln a}$$

Exemples : $\ln \sqrt{3} =$; $\ln \sqrt{(x^2 + 1)} =$; $\tfrac{1}{2} \ln 25 =$

III) La courbe et l'étude des variations .

1°) La courbe



x	0.25	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8
$\ln x$										

2°) Les limites

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$$

Interprétation graphique : L'axe des ordonnées d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

3°) Signe de la dérivée et sens de variation

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ pour tout x de $]\, 0 \,;\, +\infty \,[$ donc $(\ln x)' > 0$ pour tout x de $]\, 0 \,;\, +\infty \,[$ et la fonction ln est strictement croissante sur $]\, 0 \,;\, +\infty \,[$.

4°) Tableau de variation

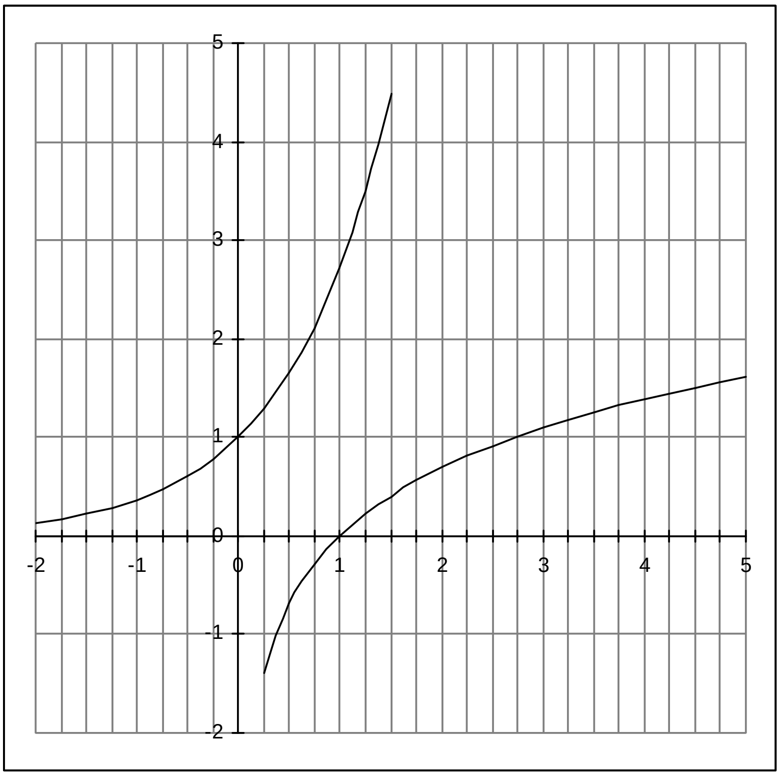
x	0		$+\infty$
$(\ln x)'$	‖	+	
$\ln x$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

5°) Signe de ln x

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	-	0	+	

IV) Liens avec la fonction exp.

1°) Le nombre e



On veut résoudre l'équation suivante : $\ln x = 1$

Définition

La fonction ln étant continue et strictement croissante de] 0 ; + ∞[dans R
e l'unique réel de] 0 ; + ∞ [tel que **ln e = 1** . La calculatrice donne e ≈ 2, 718 ...

On veut résoudre l'équation suivante : $e^x = 2$
La fonction exponentielle étant continue et strictement croissante de R dans] 0 ; + ∞[
Il existe **un unique réel strictement positif** qui vérifie cette équation d'après le théorème de la bijection et c'est **ln 2.**

$$e^{\ln 2} = 2$$

2°) Propriété

La fonction ln définit une bijection strictement croissante de]0 ;+∞ [à valeurs dans R et pour tout réel y, il existe un unique réel x strictement positif tel que ln x = y c'est le nombre $x = e^y$.
La fonction ln est la fonction réciproque de la fonction exp.

- $\ln e^x = x$ pour tout x de R.
- $e^{\ln x} = x$ pour tout x de]0 ; + ∞[

Conséquence : Démonstration de la dérivée de ln x p 172

Exemples : $\ln e^2 =$; 3 = ln ; $\ln e^{-5} =$

a) $\ln e^{-1} =$ b) $\ln e^2 =$ c) $\ln\sqrt{e} =$ d) $\ln \frac{1}{\sqrt{e}} =$ e) $e^{\ln 3} =$ f) $e^{2\ln 2} =$ g) $e^{-\ln 10} =$

V) Equations . Inéquations

1°) Equations Pour tous réels a et b strictement positifs

$$\boxed{\ln a = \ln b \text{ équivaut à } a = b}$$

Exemples : Résoudre dans R les équations suivantes
1- $\ln x = \ln 2$ 2- $\ln x = 4$ 3- $\ln(3x - 2) = \ln(x - 1)$ 4 - $\ln(x^2 + 1) - \ln 2 = 0$

Méthode : **Avant tout calcul** la première chose à faire est de déterminer ***l'ensemble E sur lequel notre équation a un sens sachant que*** **ln A existe si A > 0 .** Ensuite on résout en vérifiant bien que les solutions trouvées sont ou non dans l'ensemble E.

1- Résoudre l'équation $\ln x = \ln 2$ équivaut à résoudre le système $\begin{cases} x \in\ ]0 ; +\infty[\\ \ln x = \ln 2 \end{cases}$

ce qui donne $\begin{cases} x \in\ ]0 ; +\infty[\\ x = 2 \end{cases}$ 2 est bien dans] 0 ; + ∞ [donc $S = \{2\}$

2 – Dans cette équation on remarque « qu'il n'y a pas de ln dans le terme de droite de l'équation ». Il va falloir faire « apparaître ln » grâce à la propriété ci-dessus :
Comme $4 = \ln e^4$ on a :
Résoudre l'équation $\ln x = 4$
équivaut à résoudre le système $\begin{cases} x \in\ ]0 ; +\infty[\\ \ln x = \ln e^4 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} x \in\ ]0 ; +\infty[\\ x = e^4 \end{cases}$

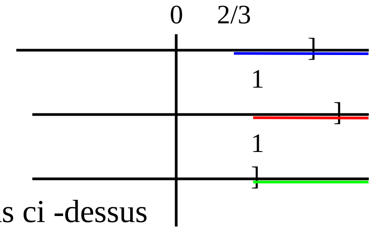
e^4 est bien dans] 0 ; + ∞ [donc $S = \{e^4\}$.

3 - Dans cette équation il y a l'inconnue x des deux côtés donc la plus grande difficulté ici sera de déterminer l'ensemble E sur lequel l'équation a un sens :

$\ln(3x - 2)$ est défini si $3x - 2 > 0$ c'est - à - dire si $x > 2/3$ soit $x \in\ ]2/3 ; +\infty[$

$\ln(x - 1)$ est défini si $x - 1 > 0$ c'est - à - dire si $x > 1$ soit $x \in\ ]1 ; +\infty[$

L'ensemble E sera l'intersection de ces deux intervalles soit E =] 1 ; + ∞ [



Remarque : pour trouver cette intersection on peut s'aider des schémas ci -dessus

« L'intersection c'est l'endroit où on peut avoir en même temps les deu$x$ couleurs » .

Résoudre l'équation ln(3x-2) = ln(x -1) équivaut à résoudre le système $\begin{cases} x \in E \\ \ln(3x-2) = \ln(x-1) \end{cases}$

ce qui donne $\begin{cases} x \in E \\ 3x-2 = x-1 \end{cases}$ $\begin{cases} \text{soit} \quad x \in E \\ x = ½ \end{cases}$

Or attention ½ $\notin$ E =] 1 ; + ∞ [donc $S = \varnothing$.

Remarque : on voit grâce à cet exemple la nécessité de toujours vérifier l'appartenance à l'ensemble de définition E des valeurs trouvées .

4 - Comme $x^2 + 1 > 0$ on a ln(x^2 + 1) défini sur R .Donc résoudre l'équation ln(x^2 + 1)- ln 2=0 équivaut à résoudre ln(x^2 + 1)= ln 2 soit $x^2 + 1 = 2$ ce qui donne encore $x^2 = 1$; On en déduite que S = {-1 ; 1} .

2°)Inéquations Pour tous réels a et b strictement positifs

ln a ≤ ln b équivaut à a ≤ b	ln a <ln b équivaut à a < b	ln a ≥ ln b équivaut à a ≥b

ln a > ln b équivaut à a > b

Exemples : Résoudre dans R les inéquations suivantes

1. ln$x$ > ln 3 2. ln x ≤ - 2 3. ln(4x - 1) > ln (x + 4) 4. ln(x^2 + 1) ≤ ln 2

Méthode : La méthode est la même que pour les équations sauf que la solution sera généralement un intervalle ou une réunion d'intervalles qui sera l'intersection de l'ensemble E de définition et des conditions trouvées après calculs.

1- Résoudre l'inéquation donnée équivaut à résoudre $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ x > 3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ x \in]3 ; +\infty[\end{cases}$

D'où la solution qui est l'intersection de ces deu$x$ intervalles à savoir S =] 3 ; + ∞ [

2 - Résoudre l'inéquation donnée équivaut à résoudre $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ \ln x \leq \ln e^{-2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ x \leq e^{-2} \end{cases}$ $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ x \in]-\infty ; e^{-2}] \end{cases}$

D'où la solution qui est l'intersection de ces deu$x$ intervalles à savoir S =] 0 ; e^{-2}] .

3 - L'inéquation a un sens si 4x - 1 > 0 et x + 4 > 0 c'est - à -dire si $x \in$] ¼ ; + ∞ [et $x \in$] -4 ; + ∞ [soit si $x \in$ E =] ¼ ; + ∞ [.

Résoudre l'inéquation donnée équivaut à résoudre $\begin{cases} x \in E \\ \ln(4x-1) > \ln(x+4) \end{cases}$ soit $\begin{cases} x \in E \\ 4x-1 > x+4 \end{cases}$ $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ 3x > 5 \end{cases}$

soit encore $\begin{cases} x \in]¼ ; +\infty[\\ x \in]5/3 ; +\infty[\end{cases}$

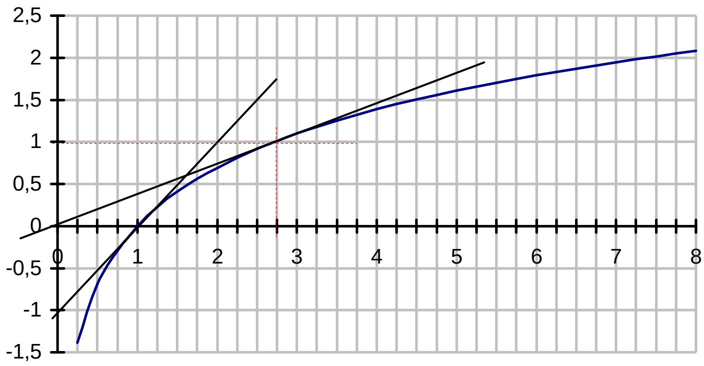
D'où la solution qui est l'intersection de ces deu$x$ intervalles à savoir S =] 5/3 ; + ∞ [

4 - Résoudre l'inéquation donnée équivaut à résoudre $x^2 + 1 \leq 2$ soit $x^2 - 1 \leq 0$. D'après la règle sur le signe du trinôme on en déduit que S =] - ∞ ; -1] U [1 ; + ∞ [.

VI) Equations de deux tangentes importantes à la courbe de la fonction ln

a)Tangente au point A(1 ; 0)

$y = x - 1$



b)Tangente au point B(e ;1)

$y = \frac{1}{e}\, x$

c)Approximation affine

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Au voisinage de 0 : $\ln(x+1) \approx x$

VII) Dérivées et primitives

1°) Théorème

Soit U une fonction dérivable et strictement positive sur I. La fonction f définie par sur I par f(x)= ln U(x) est dérivable sur I et

$$f' = \frac{U'}{U}$$

2°) Des exemples à retenir

a) Si f(x)= ln (x -1) avec $x \in]1 ; +\infty[$ alors $f'(x) = \frac{1}{x-1}$

b) si f(x) = ln (x - a) avec $x \in]a ; +\infty[$ alors $f'(x) = \frac{1}{x-a}$ (a > 0)

de même si f(x)= ln (x + b) avec $x \in]-b ; +\infty[$ alors $f'(x) = \frac{1}{x+b}$ (b > 0)

c) Si f(x)= ln 2x avec $x \in]0 ; +\infty[$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$

d'une façon générale si avec m > 0 f(x)= ln mx où $x \in]0 ; +\infty[$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$

d) Si f(x) = ln (2x - 1) avec $x \in]½ ; +\infty[$ alors $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$

de même d'une façon générale si avec m > 0 on f(x) = ln (mx + p) avec $x \in]-p/m ; +\infty[$

alors $f'(x) = \frac{m}{mx+p}$

3°) Primitives

Soit U une fonction définie et dérivable sur I. Alors les primitives de f telle que

$$f = \frac{U'}{U} \quad \text{sont les fonctions} \quad \ln|U| + C, \text{ où C est une constante réelle}$$

Exemple : $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$. Déterminer une primitive de f sur $]-\infty ; -1[$ puis sur $]-1 ; 1[$.

VIII)Autres limites

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ (n entier naturel non nul)

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\ln x = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$ (n entier naturel non nul)

Voir p 181

IX) Complément

1°) La fonction logarithme décimal

Définition

La fonction Log ou logarithme décimal est la fonction définie par :

$\text{Log} :]0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \to \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

2°) Définition de a^b (où a >0 et b réel).

Pour tout réel a >0 et tout réel b $\boxed{a^b = e^{b\ln a}}$

Exemples : $2^{0.5} = e^{\frac{1}{2}\ln 2} = \sqrt{2}$; $4^{-1.78} = e^{-1.78\ln 4} \approx$ $1{,}68^{1.2} = e^{1.2\ln 1.68} \approx$

Règles de calcul (comme les puissances !) p 176 .

3°) Racine n-ième

Théorème Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout a de $[0 ; +\infty[$ et y de $[0 ; +\infty[$ on a

$$y = \sqrt[n]{a} = a^{1/n} \quad \text{équivaut à} \quad a = y^n$$

Exemple : $\sqrt[3]{8} = (2^3)^{1/3} = 2$; $y = \sqrt[3]{a}$ équivaut à $a = y^3$.

4°) Fonctions exponentielles de base a

Soit a un réel strictement positif et différent de 1

La fonction exponentielle de base a ou $\exp_a$ est la fonction définie sur R par

$$\mathrm{Exp}_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$$

Dérivée : $\mathrm{Exp}'_a(x) = \ln a \, a^x$

Etude :

Si $0<a<1$ la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante sur R
Si $a> 1$ la fonction $\exp_a$ est strictement croissante sur R.

Limites

Si $0<a<1$ $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$

Si $a>1$ $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

Exercice : Résoudre dans R $3^x - 3^{1-x} = -2$ puis $4^x > 2$.

5°) Fonctions puissances(TD pas au programme)

Définition

On appelle fonction puissance f_α d'exposant α où **$\alpha > 0$** est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

Etude

Limite en + ∞ et en 0

$\text{Lim } x^\alpha =$

Remarque :

Dérivabilité en 0

$$T(h) = \frac{f_\alpha(h) - f_\alpha(0)}{h} =$$

Dérivée

Tableau de variation

Formule de dérivation

Soit α un réel strictement positif

Soit U une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, telle que U>0 sur I alors U^α est dérivable sur I et

Exemple : Calculer la fonction dérivée