SUITES

I Comportement d'une suite numérique

1°) Sens de variation

a) Définition

(U_n) est croissante à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$ $U_{n+1} \geq U_n$

(U_n) est décroissante à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$ $U_{n+1} \leq U_n$

(U_n) est constante à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$ $U_{n+1} = U_n$

Remarque : **Une suite croissante ou décroissante à partir de son premier terme est dite monotone**

b) Quatre méthodes

Méthode 1 : On étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$

Exemples : Etudier le sens de variations des trois suites suivantes
(U_n) définie pour tout entier n par $U_{n+1} = U_n + n$.
(V_n) définie pour tout entier n par $V_{n+1} = -V_n^{\,2} + 3V_n - 1$.
(w_n) définie pour tout entier n par $W_n = \sqrt{(n+1)} - \sqrt{n}$.

$U_{n+1} - U_n = n$ avec $n \geq 0$ donc $U_{n+1} \geq U_n$ d'où (U_n) croissante.

$V_{n+1} - V_n = -V_n^{\,2} + 2V_n - 1 = -(V_n - 1)^2$ donc $V_{n+1} - V_n \leq 0$ soit $V_{n+1} \leq V_n$ et (V_n) décroissante.

$$W_{n+1} - W_n = \sqrt{(n+2)} - \sqrt{(n+1)} - \sqrt{(n+1)} + \sqrt{n} = \sqrt{(n+2)} - 2\sqrt{(n+1)} + \sqrt{n}$$

$$W_{n+1} - W_n = \sqrt{(n+2)} + \sqrt{n} - 2\sqrt{(n+1)} = \frac{[\sqrt{(n+2)} + \sqrt{n} - 2\sqrt{(n+1)}][\sqrt{(n+2)} + \sqrt{n} + 2\sqrt{(n+1)}]}{\sqrt{(n+2)} + \sqrt{n} + 2\sqrt{(n+1)}}$$

$$W_{n+1} - W_n = \frac{(\sqrt{(n+2)} + \sqrt{n})^2 - 4(n+1)}{\sqrt{(n+2)} + \sqrt{n} + 2\sqrt{(n+1)}} = \frac{n + 2 + 2\sqrt{(n+2)}\sqrt{n} + n - 4(n+1)}{\sqrt{(n+2)} + \sqrt{n} + 2\sqrt{(n+1)}}$$

$$W_{n+1} - W_n = \frac{-2n - 2 + 2\sqrt{(n+2)n}}{\sqrt{(n+2)} + \sqrt{n} + 2\sqrt{(n+1)}} = \frac{2[\sqrt{(n+2)n} - n - 1]}{\sqrt{(n+2)} + \sqrt{n} + 2\sqrt{(n+1)}} = \frac{2[\sqrt{(n^2+2n)} - (n+1)]}{\sqrt{(n+2)} + \sqrt{n} + 2\sqrt{(n+1)}}$$

Or $n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1$ donc $n^2 + 2n < (n+1)^2$ soit comme n dans N $\sqrt{n^2 + 2n} < n+1$
Et $W_{n+1} - W_n < 0$, la suite est strictement décroissante.

Méthode 2 : Si $U_n = f(n)$ pour tout $n \geq n_0$; on étudie le sens de variation de f sur $[\, n_0 \,;\, +\infty \,[$

Et on en déduit le sens de variation de la suite (U_n) .

Exemple : $U_n = n - \exp(n + 1)$ pour tout entier n.

$U_n = f(n)$ avec $f(x) = x - e^{x+1}$ $f'(x) = 1 - e^{x+1}$. Comme $x \geq 0$ alors $x + 1 \geq 0$ et $e^{x+1} \geq 1$ càd $f'(x) \leq 0$.
et f est décroissante sur R^+ ce qui montre que la suite (Un) est décroissante puisque pour tout entier n $U_{n+1} \leq U_n$.

Méthode 3 : Si $U_n > 0$ pour tout entier $n \geq n_0$ alors on peut comparer le quotient $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.

Exemples :

1. $U_{n+1} = U_n^2 + 1$ et $U_0 = 1$.

Pour tout entier n on a $U_n \geq 1$ puisque $U_n - 1 = U_{n-1}^2$ càd $U_n - 1 \geq 0$ soir $U_n > 0$ pour tout entier n.
Pour tout entier n , $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{U_n^2 + 1}{U_n} = U_n + \dfrac{1}{U_n}$ .Or d'après précédemment $\dfrac{1}{U_n} > 0$
Soit $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} > U_n$ et aussi $U_n \geq 1$ donc finalement $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$ pour tout entier n càd (U_n) croissante

2. $U_n = \dfrac{n + 1}{2^n}$ avec $n \geq 1$. il est clair que $U_n > 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{n+2}{2n+2}$$ d'où $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ soit (U_n) strictement

décroissante puisque pour tout $n \geq 1$ $2n > n$.

Méthode 4 : la récurrence

Exemple : Soit la suite (U_n) telle que $U_0= 0$ et $U_{n+1}= \sqrt{(4 + U_n)}$

Etudier la monotonie de (U_n) à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Etudier la monotonie de (U_n) à l'aide d'un raisonnement par récurrence.
$f(x) = \sqrt{(4 + x)}$. On définie la propriété P_n : $U_n<U_{n+1}$
Initialisation : pour n=0 on $U_0 < U_1$ puisque $U_1= 2$ donc P_0 est vraie
Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un entier k fixé càd $U_k < U_{k+1}$
Alors comme f est strictement croissante $f(U_k)<f(U_{k+1})$ càd $U_{k+1}<U_{k+2}$ la propriété est vraie au rang k+1.
Conclusion : on a démontrer par récurrence que pour tout entier n $U_n<U_{n+1}$ et (U_n) est strictement croissante.

2°) Suites majorées, minorées, ….
Définition

(U_n) est majorée par un réel M s'il existe un réel M tel que $U_n \leq M$ pour tout entier naturel n.

(U_n) est minorée par un réel m s'il existe un réel m tel que $U_n \geq m$ pour tout entier naturel n.

(U_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples : . (U_n) telle que $U_n= n$ est minorée par 0 .

. (V_n) telle que $V_n= \dfrac{n + 1}{n + 2}$ est minorée par 0 et majorée par 1.

. (W_n) est la suite définie par $W_0 = 1$ et $W_{n+1} = \sqrt{(W_n + 6)}$
Montrer que pour tout entier naturel n $0< W_n \leq 3$.

On étudie pour cela $f(x) = \sqrt{x + 6}$ sur [0 ; 3] .

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 6}}$ d'où f strictement croissante sur [0 ; 3] et on a le tableau de variation

x	0	3
f(x)	$\sqrt{6}$ ↗	3

Donc $0< f(x) \leq 3$ pour tout x de [0 ; 3] .
Par récurrence : On définie la propriété P_n : $0< W_n \leq 3$.

Initialisation : pour n=0 on $0 <W_0 \leq 3$ donc P_0 est vraie.
Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un entier k fixé càd $0< W_k \leq 3$. or on a montré ci-dessus que pour tout x de l'intervalle [0 ; 3] on a $0< f(x) \leq 3$ donc d'après l'hypothèse de récurrence $0 < f(W_k) \leq 3$ càd $0< W_{k+1} \leq 3$ soit la propriété est vraie au rang k+1.
Conclusion : on en déduit par récurrence que pour tout entier n $0< W_n \leq 3$.

Remarque : Si $U_n = f(n)$ et si f bornée sur $[0 ; +\infty[$ alors la suite (U_n) l'est aussi.

Exemple : Soit la suite (U_n) définie pour tout entier n par $U_n = (n+1)e^{-(n+1)}$ Montrer que la suite est bornée.

$f(x) = (x+1)e^{-(x+1)}$ donc $f'(x) = -x\,e^{x+1}$. Donc si $x \geq 0$ alors $f'(x) \leq 0$ et f est décroissante sur R^+

x	0	$+\infty$
f(x)	1/e	0

On en déduit que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{\;}$ pour tout entier n.

Remarque : Si (U_n) est croissante (respectivement décroissante) elle est minorée (resp. majorée) par son premier terme.

3°) Limites de suites

a) Suites convergentes, suites divergentes

Définitions

- Une suite (U_n) est dite **convergente** s'il existe un réel l tel que $\lim U_n = l$
- Une suite non convergente est divergente.

Remarque : Une suite divergente peut avoir une limite infinie ou ne pas avoir de limite

Exemples :

* $U_n = \frac{1}{n}$ * $V_n = \cos 2\pi n$ * $W_n = 2^n$

b) Convergence monotone

Théorème admis

Une suite croissante et majorée (resp. décroissante et Minorée) converge.

Remarque : donne la convergence mais pas la limite !

Propriété

Une suite croissante non majorée est divergente vers $+\infty$
Une suite décroissante non minorée est divergente vers $-\infty$

Exemple :

Voir exerice résolu 17

Remarque : Soit une suite ((U_n) définie par **U_0 et $U_{n+1}=f(U_n)$ Où f est continue**.
Si (U_n) converge vers un réel a alors a vérifie a =f(a)
C'est un point fixe de f.

Exemples :
Ex1 Donner la limite de (U_n) où $U_n = e^{(n2 - 1 /n)}$
Ex2 :

Soit f la fonction définie sur $[0 ; + \infty [$ par $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2x}$ et $U_{n+1} = f (U_n)$, le premier terme est U_0

1°) Déterminer le point fixe x_0 de f.
2°) On admet que pour tout entier n

$$| U_n - x_0| \leq \left(\frac{18}{25}\right)^n | U_0 - x_0 |$$ Donner alors la limite de (U_n).

Ex 3 : La suite (Un) est définie par Uo = 1 et $U_{n+1} = U_n/(2+ U_n)$.

a) Mtq pour tout n, $U_n>0$
b) Etudier le sens de variation de $f (x) = x/(x + 2)$ sur R^+.En déduire le sens de variation de (U_n)
c) Mtq U_n est convergente
d) Conjecturer cette limite avec la calculette

Correction :
Ex1 : lim $U_n = +\infty$
Ex2 : 1°) $f(x_0)=x_0$ donne $x_0 = 0,5$ car $x\geq0$.
2°) lim $U_n = 0$.
Ex 3 : a) On le démontre très simplement par récurrence.
b) f strictement croissante sur R^+ . On démontre par récurrence que (U_n) est strictement décroissante
Initialisation : pour n=0 on $U_1 < U_0$ puisque $U_1= 0,5$
Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un entier n fixé
Alors comme f est st Croiss $f(U_{n+1})<f(U_n)$ càd $U_{n+2}<U_{n+1}$ la propriété est vraie au rang n+1.
Conclusion : pour tout entier n $U_{n+1}<U_n$
c)$U_n\geq0$ càd minorée et décroissante elle converge donc.
d)Lim U_n =0