VARIABLES ALEATOIRES ET LOI DES GRANDS NOMBRES

RAPPELS DE PREMIERE => voir le cours

I Combinaison linéaire de variables aléatoires

1°) Somme de variables aléatoires

a) Définition

Soit X et Y deux variables aléatoires associées à une même expérience d'univers fini Ω.
La somme de X et Y est la variable aléatoire Z = X + Y définie sur Ω qui prend comme valeur pour un événement donné la somme des valeurs de X et Y.

b) Etude détaillée d'un exemple

Une urne contient trois jetons rouges marqués, « 0 » et deux jetons bleus marqués « 1 ». On tire au hasard deux jetons de l'urne. On effectue un tirage avec remise.

X est la VA qui au premier tirage associe le numéro du jeton tiré
Y est la VA qui au second tirage associe le numéro du jeton tiré
Déterminer la loi de X, de Y puis de Z = X + Y .

X	0	1
P(X=xi)	3/5 = 0,6	2/5=0,4

Comme X et Y sont indépendantes car associées à des épreuves indépendantes

Y	0	1
P(Y=yi)	3/5 = 0,6	2/5=0,4

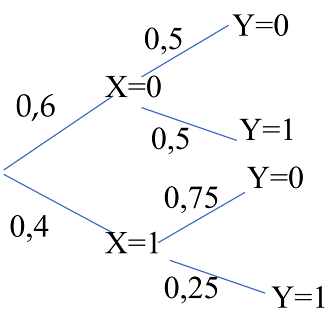
Z = Y+ Y donc Z= 0, 1 ou 2 .
$P(Z=0) = P(X = 0 \text{ et } Y = 0) = P ((X=0) \cap (Y = 0)) = P(X = 0) \times P(Y = 0) = 0,36$
$P(Z=1) = P(X = 1 \text{ et } Y = 0) + P(X = 0 \text{ et } Y = 1) = P(X = 1) \times P(Y = 0)+ P(X = 0) \times P(Y = 1)= 2\times0,4\times0,6 = 0,48$.
$P(Z=2) = P(X = 1 \text{ et } Y = 0) = P ((X=1) \cap (Y = 1)) = P(X = 1) \times P(Y = 1) = 0,16$

Z	0	1	2
P(Z=zi)	0,36	0,48	0,16

Exercice : Déterminer Z dans le cas d'un tirage sans remise

Corrigé :

X	0	1
P(X=xi)	3/5 = 0,6	2/5=0,4



Z = Y+ Y donc Z= 0, 1 ou 2 .
P(Z=0) = P(X = 0 et Y = 0) = P ((X=0) ∩ (Y = 0)) = P(X = 0) × $P_{(X=0)}$ (Y = 0) = 0,6.0,5 = 0,3
P(Z=1) = P(X = 1 et Y = 0) + P(X = 0 et Y = 1) = P(X = 1) × $P_{(X=1)}$ (Y = 0)+ P(X = 0) × $P_{(X=0)}$ (Y = 1)= 0,4×0,75 + 0,6 x 0,5 = 0,6 .
P(Z=2) = P(X = 1 et Y = 0) = P ((X=1) ∩ (Y = 1)) = P(X = 1) × $P_{(X=1)}$ (Y = 1) = 0,4x 0,24= 0,1

Z	0	1	2
P(Z=zi)	0,3	0,6	0,1

2°) Produit de variables aléatoires par un réel

a) Définition

Soit X une variable aléatoire associée à une expérience d'univers fini Ω.
La variable aléatoire Z = aX où a est réel définie sur Ω est la VA qui prend comme valeur pour un événement donné le produit de a et des valeurs de X. On a P(Z=axi)=P (X= xi)

b)Etude détaillée d'un exemple

On lance une pièce de monnaie équilibrée sur laquelle est inscrite 0 et 1. Soit X la VA qui au lancer d'une pièce associe le numéro inscrit sur la face supérieure de la pièce. On a donc P(X=0) = 0.5 et P(X=1) = 0.5.

On considère la VA T=2X. P(T=0)=P(X=0)=0.5 et P(T=2)=P(X=1)=0.5.

3°) Propriétés

Propriété 1

Pour toutes variables aléatoires X et Y et pour tout nombre réel a :
E(aX)= aE(X). E(X +Y)= E(X) +E(Y) $V(aX)= a^2V(X)$ $\sigma(aX)= |a|\ \sigma(X)$

Propriété 2

Soient X et Y deux variables aléatoires INDEPENDANTES alors V(X+Y)=V(X)+V(Y)

Exemple: La loi d'une VA X est donnée par le tableau suivant :

x	-1	0	1	2
P(X=x)	0.15	0.36	0.27	0.22

On considère les VA Z= -3X et T= 2X+2

Calculer l'espérance et l'écart -type de : a. X b. Z c. T

Corrigé : a. 0.56 et $\sqrt{0.9864}$ b. -1.68 et $3\sqrt{0.9864}$ c. 3.12 et 2 $\sqrt{0.9864}$

II Echantillon d'une loi de probabilité

1°) Echantillon de taille n

Définition

Soit une variable X suivant une loi de probabilité.
Une liste de **variables indépendantes** (X1, X2, . . . , Xn) suivant cette même loi est appelée **échantillon de taille n** associé à X.

2°) Espérance, variance , écart-type d'un échantillon de taille n

La somme d'un échantillon de taille n est la VA Sn =X1+X2+⋯+Xn et la moyenne de cet échantillon est la VA Mn = $\frac{1}{n}$Sn ,

on a alors:

E(Sn) = nE(X) , E(Mn) = E(X) et V(Sn) = nV(X) , V(Mn) = $\frac{1}{n}$V(X) , σ(Vn)= $\sqrt{n}\,\sigma$(X)
σ(Mn)= $\frac{1}{\sqrt{n}}$ σ(X)

Exemple : X ∽ B(8,0.2) et M_{10} de la loi X. E(X) = 1.6 et E(M_{10}) = 1.6 V(X) =1,28 et V (M_{10}) = 0,128. σ(M_{10})= $\frac{1}{\sqrt{10}}$ $\sqrt{1.28}$ = 0,358

III Loi des grands nombres

1°) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

(Biennaymé-1796 – 1878 ; maths français a énoncé l'égalité en 1853 mais c'est Tchebychev – 1821 -1894 ; maths Russe qui l'a démontrée en 1867)

Soit X une VA d'espérance E(X) et de variance V(X).Pour tout réel d>0 on a :

$$P(\ |X - E(X)| \geq d\ ) \leq \frac{V(X)}{d^2}$$

2°) Conséquence : Inégalité de concentration

Soit Mn la VA moyenne d'un échantillon de taille n d'une VA d'espérance E(X) et de variance V(X) , alors pour tout réel d>0 :

$$P(\ |M_n - E(X)| \geq d\ ) \leq \frac{V(X)}{nd^2}$$

Remarque : Plus la taille *n* de l'échantillon est grand plus la variance de *Mn* est petite donc plus la valeur de *Mn* se rapproche de l'espérance de *X*.

Exemple : On lance 3600 fois une pièce de monnaie non truquée. Soit X la VA qui associe à cette expérience le nombre de Pile obtenus.

1°) Ecrire l'inégalité de BT relative à la VA X.

2°) Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions de Pile soit strictement compris entre 1600 et 2000.

Corrigé :

1°) X suit B(3600, 0.5) . Elle a pour espérance E(X) = 3600.0.5 = 1800.

V(X) = 1800.0.5= 900. On a alors pour tout réel d>0 :

$$P(|X - 1800| \geq d) \leq \frac{900}{d^2}$$

2°) 1600<X<2000 équivaut à 1800-200<X< 1800+200 soit à -200< X -1800<200

$soit$ $|X - 1800| < 200$. On applique BT du 1°) :

$$P(|X - 1800| \geq 200) \leq \frac{900}{200^2}$$

Or P($|X - 1800| \geq 200$)= 1 - P($|X - 1800| < 200$) soit

P($|X - 1800| < 200$) $\geq$ 0.955 . On en conclut que la probabilité que le nombre d'apparitions de pile soit compris strictement entre 1600 et 2000 est au moins de 95.5%.

3°) Loi faible des grands nombres

Théorème

Soit Mn la VA moyenne d'un échantillon de taille n d'une VA d'espérance E(X) et de variance V(X) , alors pour tout réel d>0 :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq d) = 0$$

Application : Utiliser l'inégalité de concentration pour définir une taille d'échantillon

On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On note X la variable aléatoire qui, à un tirage donné, associe 1 si la boule tirée est rouge, et 0 sinon, et M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X.

1. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$, puis écrire l'inégalité de concentration relative à M_n.
2. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera strictement comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Solution commentée

1. X est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{5} = 0{,}4$ donc $E(X) = 0{,}4$ et $V(X) = 0{,}4 \times (1 - 0{,}4) = 0{,}24$. On écrit l'inégalité de concentration relative à M_n, variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X avec $\mu = 0{,}4$ et $V = 0{,}24$:

$$P\left(\left|M_n - 0{,}4\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{0{,}24}{n\delta^2}, \text{ pour tout réel } \delta > 0.$$

2. On cherche ici le plus petit entier n tel que $P(0{,}35 < M_n < 0{,}45) > 0{,}95$.
On remarque que $0{,}35 < M_n < 0{,}45$ équivaut à $\left|M_n - 0{,}4\right| < 0{,}05$.
On veut que M_n vérifie : $P\left(\left|M_n - 0{,}4\right| < 0{,}05\right) > 0{,}95$.
L'événement contraire de $\left\{\left|M_n - 0{,}4\right| < 0{,}05\right\}$ est $\left\{\left|M_n - 0{,}4\right| \geqslant 0{,}05\right\}$.
Ainsi : $P\left(\left|M_n - 0{,}4\right| < 0{,}05\right) = 1 - P\left(\left|M_n - 0{,}4\right| \geqslant 0{,}05\right)$.
Donc : $P\left(\left|M_n - 0{,}4\right| < 0{,}05\right) > 0{,}95$ équivaut à $1 - P\left(\left|M_n - 0{,}4\right| \geqslant 0{,}05\right) > 0{,}95$ soit $P\left(\left|M_n - 0{,}4\right| \geqslant 0{,}05\right) < 0{,}05$ **(1)**.
L'inégalité de concentration avec $\delta = 0{,}05$ s'écrit :
$P\left(\left|M_n - 0{,}4\right| \geqslant 0{,}05\right) \leqslant \frac{0{,}24}{n \times 0{,}05^2}$, soit $P\left(\left|M_n - 0{,}4\right| \geqslant 0{,}05\right) \leqslant \frac{60\,000}{n}$.
L'inégalité **(1)** sera vérifiée si l'on choisit n tel que $\frac{60\,000}{n} < 0{,}05$
On en déduit : $0{,}05n > 60\,000$, soit $n > \frac{60\,000}{0{,}05}$.
$\frac{60\,000}{0{,}05} = 1\,200\,000$, donc le nombre minimal de lancers est 1 200 001.