SYSTEMES

1°) Propriété

Deux droites obliques qui ne sont pas parallèles sont SECANTES
Elles ont alors un seul point commun appelé point d'intersection.
C'est l'unique point dont les coordonnées vérifient les équations de chacune des deux droites lorsque le plan est rapporté à un repère.
Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection il suffit de résoudre un système formé par deux équations.

En clair si D : $y = mx + p$ et D' : $y = m'x + p'$ et $m \neq m'$

Le système $\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$

a un seul couple solution, les coordonnées du point d'intersection de D et D'.

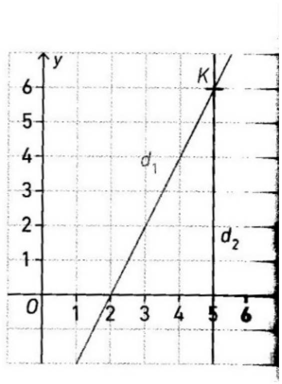
2°) Etude de deux exemples

Cas 1 : oblique et verticale

On considère dans un repère les droites d_1 d'équation $y = 2x - 4$ et d_2 d'équation $x = 5$.
d_2 est parallèle à l'axe des ordonnées et d_1 est sécante avec l'axe des ordonnées. Donc les droites d_1 et d_2 sont sécantes (car non parallèles entre elles).
Les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de leur point d'intersection K vérifient donc le système :

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \times 5 - 4 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 5 \end{cases}.$$

Les droites d_1 et d_2 se coupent donc en $K(5\ ;\ 6)$.



Cas 2 : deux obliques

Exercice

Dans un repère on considère les droites D : $y = -3x + 7$ et D' : $y = x - 5$.

1. Justifier que D et D' sont sécantes
2. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Corrigé

1. **Les coefficients directeurs respectifs de D et D', à savoir m = -3 et m'=1, ne sont pas égaux donc D et D' sont sécantes**
2. **Les coordonnées $(x\ ;\ y)$ *de* leur point d'intersection K vérifient donc le système :**

$$\begin{cases} y = -3x + 7 \\ y = x - 5 \end{cases}$$

Qui équivaut à

$$\begin{cases} x - 5 = -3x + 7 \\ y = x - 5 \end{cases}$$

Remarque : on peut aussi choisir de garder l'équation y=-3x+7

Qui équivaut encore à

$$\begin{cases} 4x = 12 \\ y = x - 5 \end{cases}$$

soit à

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 - 5 = -2 \end{cases}$$

Les droites D et D' se coupent donc en K(3 ; -2) .

3°) COMPLEMENT :Systèmes linéaires

Les 6 réels a,b,c et a’,b’,c’ sont DONNES

Résoudre pour x et y réels le système $\begin{cases} a\ x + b\ y = c \\ a'\ x + b'\ y = c' \end{cases}$

Consiste à déterminer l’ensemble S des couples (x ; y) de réels qui vérifient les deux équations simultanément.

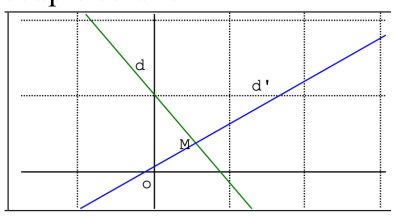
Interprétation graphique

Les deux équations sont celles de deux équations de droites alors si

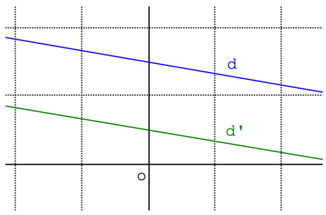
D : $ax + by = c$ et D’ : $a'x + b'y = c'$

On a trois cas possibles :

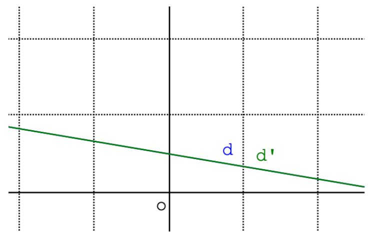
D et D’ sont sécantes un seul couple solution



D et D’ sont strictement parallèles : aucun couple solution



D et D’ sont confondues : Une infinité de couples solution



POUR LA **RESOLUTION on a 2 METHODES**

La méthode par substitution (mécanique mais sûre) ou la méthode par combinaison (difficile mais rapide).

1- Par substitution (mécanique mais sûre)

$$\begin{cases} 2x - y = 11 & (1) \\ 3x + 4y = 55 & (2) \end{cases}$$

PRINCIPE : on exprime *y* en fonction de *x* ou le contraire à partir de l’une des équations et on substitue y ou *x* dans l’autre équation

On choisit dans notre exemple d’exprimer y en fonction de x dans l’équation 1 : y = $2x - 11$

On remplace dans (2) d’où on obtient

$$\begin{cases} y = 2x - 11 \\ 3x + 4(2x - 11) = 55 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 11 \\ 11x = 99 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 18 - 11 = 7 \\ x = 9 \end{cases}$$

Le système a une unique solution le couple (9 ; 7) S = { (9 ;7)}

2- Par combinaison (plus compliquée mais rapide)

$$\begin{cases} 2x - y = 11 & (1) \\ 3x + 4y = 55 & (2) \end{cases}$$

PRINCIPE : on multiplie les équations par des réels de façon à ce que l’une des inconnues *x* ou y soit éliminée en ajoutant les nouvelles équations ainsi obtenues

On choisit dans notre exemple d’éliminer y, on multiplie l’équation E_1 par 4

$$4E_1 \rightarrow \begin{cases} 8x - 4y = 44 \\ 3x + 4y = 55 \end{cases} \quad \mathbf{4E_1 + E_2} \rightarrow \begin{cases} 11x = 99 \\ 3x + 4y = 55 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9 \\ y = (55 - 27)/4 = 7 \end{cases}$$

Le système a une unique solution le couple (9 ; 7) S = { (9 ;7)}

Interprétation graphique

Point d’intersection (9 ; 7)