EXAMEN BLANC DE MATHEMATIQUES DU 17/03/22
TERMINALE SPECIALITE MATHS
DUREE 4 H

BAREME : 5 points par exercice

Exercice 1

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Lors d'une épidémie chez des lapins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1% est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un lapin est porteur de la maladie, le test est positif dans 85% des cas;
- si un lapin est sain, le test est négatif dans 95% des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie. On note :

M l'évènement : « le lapin est porteur de la maladie » ;
T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. Un lapin est choisi au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

3. Un lapin est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

4. On choisit vingt lapins au hasard. La taille de ce groupe permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, aux vingt lapins choisis, associe le nombre de lapins ayant un test positif.

a- Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.
b- Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Interpréter le résultat.
c- Quelle est la probabilité pour que cinq lapins parmi les vingt testés aient un test positif ? Justifier.
d- Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des vingt animaux ait un test positif ? Justifier.

5. a- Déterminer la valeur du plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0{,}9$.
b- Interpréter le résultat obtenu.

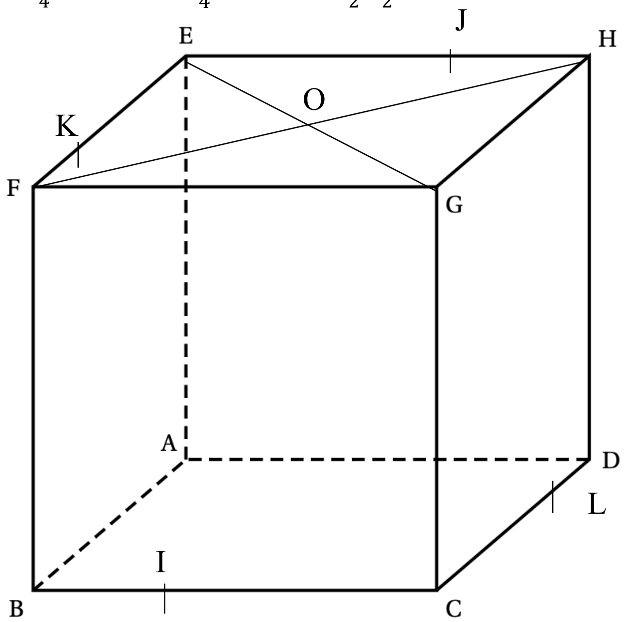
Exercice 2

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
Le point O est le centre du carré EFGH.
On se place dans le repère orthonormé (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$).

Dans ce repère on donne les coordonnées des points suivants :

A(0 ;0 ;0) B(1 ;0 ;0) C(1 ;1 ; 0) D(0 ;1 ;0) E(0 ;0 ;1) F(1 ; 0 ; 1) G(1 ;1 ;1) H(0 ;1 ;1)
I(1 ; $\frac{1}{3}$; 0)   J(0 ; $\frac{2}{3}$; 1)   K($\frac{3}{4}$; 0 ; 1)   L ($\frac{1}{4}$; 1 ; 0)   O($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1)



1. Les points suivants ne sont pas coplanaires :

a. A, B, I et L   b. O, F, B et D   c. J, H, D et L   d. O, E, G et K

2. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ}$ sont :

a. $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Une représentation paramétrique de la droite (OJ) est :

a. $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$, $t \in R$ b. $\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}t \\ z = 1 \end{cases}$ $t \in R$ c. $\begin{cases} x = -t \\ y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$, $t \in R$ d. $\begin{cases} x = \frac{1}{4}t. \\ y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = 1 \end{cases}$, $t \in R$

4. On donne une représentation paramétrique de la droite (IJ) :

$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = 3t \end{cases}$, $t \in R$

Et une représentation paramétrique de la droite (KL).

$\begin{cases} x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t' \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$, $t' \in R$

On admet que ces deux droites sont sécantes. Les coordonnées du point d’intersection N des droites (IJ) et (KL) sont :

a. $(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3})$ b. $(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ c. $(\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{1}{2})$ d. $(\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{1}{3})$

5. Les vecteurs suivants forment une base de l’espace :

a. $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{DL}$ b. $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{JH}$ et $\overrightarrow{OE}$ c. $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{GC}$ d. $\overrightarrow{FK}$, $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FH}$

Exercice 3

Un propriétaire de centre de loisirs qui veut se diversifier a ouvert une activité sportive d'escalade sur mur. Il a recensé 3 000 personnes inscrites le jour de son inauguration, le 1er juin 2021. Mais il est inquiet car au cours de l'année après une hausse constante entre les mois de juin et d'octobre il constate une baisse du nombre de personnes inscrites de novembre à mai. Il sait que si le nombre de personnes inscrites devient inférieur à 2 000 l'activité ne sera plus rentable pour le centre.

Il consulte alors un cabinet d'étude qui élabore une projection selon laquelle, chaque année :

- Entre le 1er juin et le 31 octobre, il y a 80 nouvelles personnes inscrites ;
- Puis entre le 1er novembre et le 31 mai, l'activité d'escalade subit une baisse de 5 % de son effectif de personnes inscrites par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de personnes inscrites à l'activité d'escalade par une suite (U_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, U_n désigne le nombre de personnes inscrites au 1er juin de l'année 2021 + n.

On a donc $U_0 = 3000$.

1. Justifier que $U_1 = 2926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0{,}95U_n + 76$.
3. **a)** Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_n \geq 1520$.
b) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante.
c) Justifier que la suite (U_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

4. On désigne par (V_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - 1520$.
a) Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $U_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.
c) Déterminer la limite de la suite (U_n).

5. Recopier et compléter la fonction python suivante qui permet de déterminer le rang à partir duquel le nombre de personne inscrites à l'activité d'escalade sera inférieure à 2 000.

```
def seuil():
    n= ............
    u= ............
    while ........................ :
        n= ........................
        u=......................................
    print("le rang est",.... )
```

6. L'activité d'escalade fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

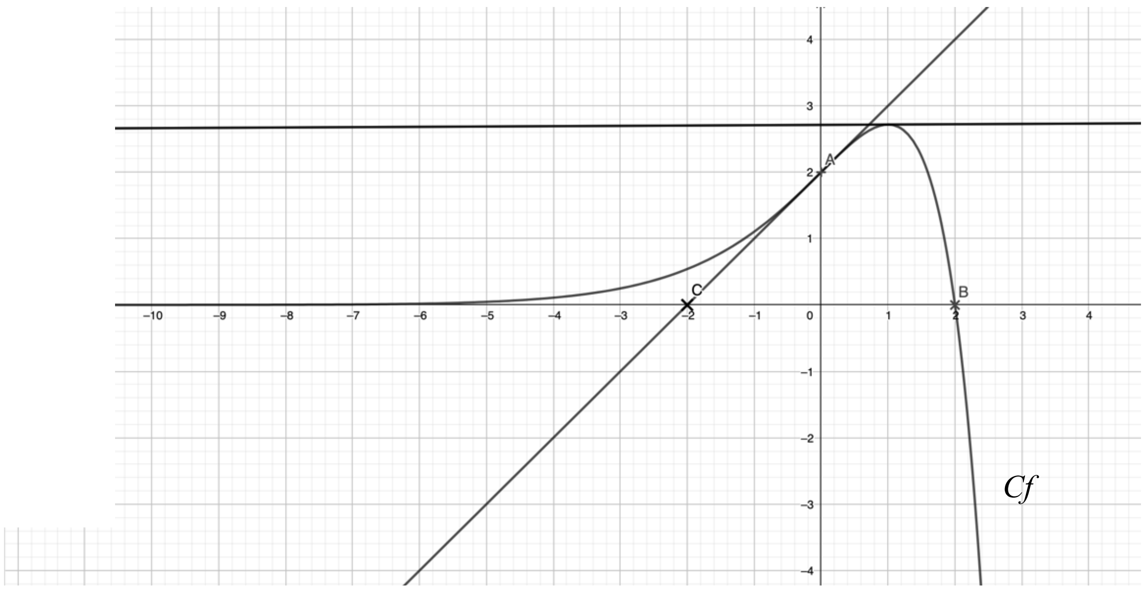
Le candidat choisira un seul exercice parmi les deux proposés ci-après.

Exercice A

Partie I : Observation graphique

Dans le repère ci-dessous, on note C_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
On a placé les points A(0; 2), B(2; 0) et C(−2 ; 0).
On dispose des renseignements suivants :

- Le point B appartient à la courbe C_f.
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe C_f.
- La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est une droite horizontale.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique :

1. Indiquer la valeur de $f(0)$, $f(2)$, $f'(0)$ *et de* $f'(1)$.

2. Que semble représenter l'axe des abscisses pour la courbe C_f ?

3. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

4. a) Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans $\mathbb{R}$.

b) Donner un encadrement à l'aide de deux entiers naturels de la solution positive de l'équation $f(x) = 1$.

5. Indiquer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

6. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Partie II : Etude de la fonction

Dans cette partie, on cherche à vérifier par le calcul les résultats lus graphiquement dans la partie I.

On sait désormais que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f\ (x) \ = \ 2e^{x} \ - \ xe^{x}$.

1. Déterminer la limite de f en - ∞ .

2. a) Montrer que $f'(x) = \ (1 - x)e^{x}$ puis étudier son signe sur $\mathbb{R}$.

b) On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. a) Démontrer que l'équation $f(\ x\ ) \ = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; 2]$

b) Déterminer un encadrement à 10^{-2} près de α .

Partie III: Etude de la convexité

On veut étudier la position relative de la courbe C_f et de la tangente (AC).

1. Déterminer l'équation réduite de la droite (AC).
2. **a)** Calculer $f''\ (\ x\ )$.

   b) Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
3. Que représente le point A pour la courbe C_f?
4. Déduire de ce qui précède la position relative de C_f et de la tangente (AC) sur $\mathbb{R}$.

Exercice B

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $g\ (\ x\ ) = \ ln(x) \ + \ x$

1. Déterminer la limite de g en 0 et en +∞.

2. **a)** Calculer $g'(\ x\ )$ et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur]0 ; +∞[.

3. Démontrer que l'équation $g\ (x)=0$ admet une unique solution α sur]0 ; +∞[
puis donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

4. En déduire le signe de g sur]0 ; +∞[.

Partie II: Etude d'une fonction *f*

On considère la fonction *f* , définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = x\ln(x) - x + \frac{x^2}{2}$

1. On admet que la fonction *f* est dérivable sur]0 ; +∞[et on note *f* ' sa dérivée.

Vérifier que, pour tout *x* de]0 ; +∞[on a : $f'(x) = g(x)$.

2. Déterminer la limite de *f* en 0.

3. On admet que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que f(α) = -0,73.

Dresser le tableau de variation de la fonction *f* sur]0 ; +∞[.

Partie III: Etude de la convexité

C_f est la courbe représentative de *f* dans un repère. On veut étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite D d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ sur l'intervalle]0; +∞[.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1.
Que constate-t-on ?

2. Calculer $f''(x)$ puis étudier la convexité de *f* sur]0 ; +∞[.

3. En déduire la position relative de C_f et de la droite D sur]0 ; +∞[.