SUITES

FICHE 4 : Comportement d'une suite numérique

1°) Sens de variation

a) Définition

(U_n) est croissante à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$ $U_{n+1} \geq U_n$ $(U_{n+1} - U_n \geq 0)$
(U_n) est décroissante à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$ $U_{n+1} \leq U_n$ $(U_{n+1} - U_n \leq 0)$
(U_n) est constante à partir du rang n_0 si pour tout $n \geq n_0$ $U_{n+1} = U_n$

Remarque : **Une suite croissante ou décroissante à partir de son premier terme est dite monotone**

b) Quatre méthodes

Méthode 1 : On étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$

Exemples : Etudier le sens de variations des trois suites suivantes

(U_n) définie pour tout entier n par $U_{n+1} = U_n + n$

(V_n) définie pour tout entier n par $V_{n+1} = -V_n^2 + 3V_n - 1$.

Corrigé :

$U_{n+1} - U_n = n$ avec $n \geq 0$ donc pour tout entier n, $U_{n+1} \geq U_n$ d'où (U_n) croissante.

$V_{n+1} - V_n = -V_n^2 + 2V_n - 1 = -(V_n - 1)^2$ donc $V_{n+1} - V_n \leq 0$ soit pour tout entier n $V_{n+1} \leq V_n$ et (V_n) décroissante.

Méthode 2 : Si $U_n = f(n)$ pour tout $n \geq n_0$; on étudie le sens de variation de f sur $[n_0 ; +\infty[$
Et on en déduit le sens de variation de la suite (U_n).

Exemple : $U_n = -n^2$ pour tout entier n.

$U_n = f(n)$ avec $f(x) = -n^2$, f est décroissante sur R^+ ce qui montre que la suite (Un) est strictement décroissante car pour tout entier n $U_{n+1} < U_n$.

Méthode 3 : Si $U_n > 0$ pour tout entier $n \geq n_0$ alors on peut comparer le quotient $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.

Exemple : $U_n = 3.2^n$ Pour tout entier n on a $U_n > 0$ Pour tout entier n $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 2$.

Or $2 > 1$ soit $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$càd (U_n) croissante strictement.

Méthode 4 : la récurrence

Exemple type : Soit la suite (U_n) telle que $U_0= 0$ et $U_{n+1}= (4 + U_n)^3$.Etudier la monotonie de (U_n) à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Corrigé

$U_{n+1}= f(U_n)$ où $f(x) =(4 + x)^3$.
f est dérivable sur R car il s'agit d'une fonction polynôme.
Comme $f '(x) = 3(4 + x)^2$, soit $f '\geq 0$ sur R, f est croissante sur R .

On définit la propriété $\mathbf{P_n : U_n \leq U_{n+1}}$

Initialisation : pour n=0 on a $U_0 \leq U_1$, puisque $U_1= 64$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : On suppose la propriété vraie **pour un entier n** fixé c'est-à-dire $U_n \leq U_{n+1}$
Par hypothèse de récurrence on a
$U_n \leq U_{n+1}$. **Comme f est croissante sur R**, on en déduit que
$f(U_n) \leq f(U_{n+1})$
soit $U_{n+1} \leq U_{n+2}$
La propriété est donc vraie au rang n+1.

Conclusion : P_n est vraie au rang 0, elle est héréditaire, on a ainsi démontré par récurrence que **pour tout entier n,** $U_n \leq U_{n+1}$ soit (U_n) est strictement croissante.
.

2°) Suites majorées, minorées et conséquences

a)Définition

(U_n) est majorée par un réel M s'il existe un réel M tel que $U_n \leq M$ pour tout entier naturel n.

(U_n) est minorée par un réel m s'il existe un réel m tel que $U_n \geq m$ pour tout entier naturel n.

(U_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples : (U_n) telle que $U_n= n$ est minorée par 0 .
. (V_n) telle que $V_n=\frac{1}{2n+3}$ est minorée par 0 et majorée par 1.
Remarque : Si $U_n= f (n)$ et si f bornée sur $[0 ; + \infty[$ alors la suite (U_n) l'est aussi.

Exemple : Soit la suite (U_n) définie pour tout entier n par $U_n = \frac{2n+1}{3n+2}$ Montrer que la suite est bornée.

$f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$; $f ' (x) = \frac{1}{(3x+2)^2}$

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↗	$\frac{2}{3}$

On en déduit que $\frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{2}{3}$ pour tout entier n

Remarque : **Si (U_n) est croissante (respectivement décroissante) elle est minorée (resp. majorée) par son premier terme.**

b) Théorème fondamental sur les limites de suites

Théorème admis

Une suite croissante et majorée converge.
Une suite décroissante et minorée converge.

Remarque : attention ne donne que la convergence mais pas la limite !

Exemple :

La suite (Un) est définie par Uo = 1 et $U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n+2}$. On admet que pour tout n, $U_n>0$

On admet que (U_n) est strictement décroissante .

a) Mtq U_n est convergente

b)Conjecturer cette limite avec la calculette

Correction :

a)Comme $U_n>0$ pour tout entier naturel n, (Un) est minorée par 0. De plus la suite est décroissante, donc d'après le théorème de convergence monotone la suite converge .

b)Lim U_n =0

Propriété

Une suite croissante non majorée est divergente vers +∞
Une suite décroissante non minorée est divergente vers -∞

Exemple : Voir méthode 9 p 25 et ex 23 p 27 magnard Tspé

c) Continuité et limites de suites

Théorème : Soit une suite (U_n) définie par **U_0 et $U_{n+1}=f(U_n)$**.

Si (U_n) converge vers un réel a et si **f est continue en a** alors a vérifie a =f(a) C'est un point fixe de f.

(voir ex 22 p 26 3°)) . La continuité et la démonstration seront vues ultérieurement .