SUITES
FICHE 3 : Les suites géométriques

1°) DEFINITION

a)Exemple

voici une suite de nombres à compléter

1 3 9 27 81 ... ...

On multiplie chaque terme par le même nombre 3 qui est la raison de la suite et on écrit :

$U_0 = 1$ $U_1 = 3 \times U_0 = 3$ $U_2 = 3 \times U_1 = 9$ etc…

b) Définition

Dire qu'une suite est géométrique signifie qu'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{U_{n+1} = q \times U_n}$$

q est la raison de la suite.

Exemples :

1) Exemple de suite géométrique :
   $U_0 = 1$ et $q = 2$.
   $U_0 = 1$ $U_1 = 2$ $U_2 = 2^2 = 4$ ….

2) Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 10$ et $U_{n+1} = -4U_n$

Calculer les 3 premiers termes de (U_n).

On peut utiliser la calculatrice

$U_0 = 10$. $U_1 = -4 \times 10 = -40$ $U_2 = -4 \times -40 = 160$ ….

2°) Montrer qu'une suite est géométrique :

Pour démontrer qu'une suite est géométrique on démontre que pour tout entier naturel n

$$\mathbf{U_{n+1} = q \times U_n}$$

où q est la raison c'est – à – dire ***une constante indépendante de n***

RAPPEL IMPORTANT : $(a)^{n+1} = (a)^n \times a$

Exemple : $U_n = 3(2)^n$; $U_{n+1} = 3(2)^{n+1}$ donc $\mathbf{U_{n+1} = 3(2)^n \times 2 = 2 \times U_n}$
(Un) est donc une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $U_0 = 3$.

RAPPEL : $a^0 = 1$

3°) Formule explicite d'une suite géométrique

Observation

$\cancel{U_1} = U_0 \times (5)$
$\cancel{U_2} = \cancel{U_1} \times (5)$
$\cancel{U_3} = \cancel{U_2} \times (5)$ On multiplie terme à terme et on compte , on effectue le produit de n termes
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\cancel{U_{n-1}} = \cancel{U_{n-2}} \times (5)$
$U_n = \cancel{U_{n-1}} \times (5)$

$U_n = U_0 \times (5)^n$

a) Le premier terme est U_0

Si (U_n) est une suite géométrique de **raison q**, **de premier terme U_0** alors, pour tout entier naturel n , on a

$$\boxed{\mathbf{U_n = U_0 \times (q)^n}}$$

Exemple : (Un) est donc une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $U_0 = 2$.
$U_n = 2(3)^n$

b) Le premier terme est U_1

Si (U_n) est une suite **géométrique** de **raison q**, **de premier terme U_1** alors , pour tout entier naturel n , on a

$$\boxed{\mathbf{U_n = U_1 \times (q)^{n-1}}}$$

Exemple : (Un) est donc une suite géométrique de raison -5 et de premier terme $U_1 = 12$.
$U_n = 12(-5)^{n-1}$ soit $U_n = -\frac{12}{5}(-5)^n$

c) Cas général

Pour tout entier naturel k

$$\boxed{U_n = U_k \times q^{n-k}}$$

Exemple : (Un) est donc une suite géométrique de raison 4 et $U_8 = 2$.
$U_n = 2(4)^{n-8}$ soit $U_n = \frac{1}{32768}(4)^n$

4°) Sens de variation d'une suite géométrique

Propriété

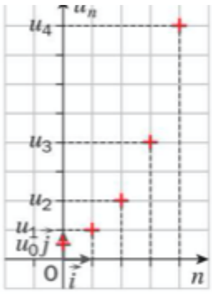
Propriétés (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme $u_0 \neq 0$.

	$u_0 < 0$	$u_0 > 0$
$q < 0$	(u_n) n'est pas monotone.	(u_n) n'est pas monotone.
$0 < q < 1$	(u_n) est strictement croissante.	(u_n) est strictement décroissante.
$q = 1$	(u_n) est constante égale à u_0.	(u_n) est constante égale à u_0.
$q > 1$	(u_n) est strictement décroissante.	(u_n) est strictement croissante.

Si $q = 0$ alors, à partir de u_1, tous les termes sont nuls.
Si $u_0 = 0$, alors tous les termes sont nuls.

EXEMPLE :

- On a représenté ci-contre la suite géométrique (u_n) de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 0{,}5$. $q = 2 > 1$ et $u_0 = 0{,}5 > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
- La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $v_0 = 8$.
$q = 0{,}5 \in]0\,;1[$ et $v_0 = 8 > 0$, donc la suite (v_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
- La suite (w_n) est géométrique de raison $q = -3$ et de premier terme $w_0 = 1$.
$q = -3 < 0$, donc la suite (w_n) n'est pas monotone.



La suite (w_n) prend alternativement des valeurs positives et négatives.

5°) Somme des termes d'une suite géométrique

a) Somme $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ où $q \neq 0$ et $q \neq 1$

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple :

$$1 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{10} = \frac{1 - 5^{10+1}}{1 - 5} = \frac{1 - 5^{11}}{-4} = 12\,207\,031.$$

b) Somme des premiers termes

(U_n) suite géométrique de raison $q \neq 1$et de premier terme U_0 : $$U_0 + U_1 + \ldots + U_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$	(U_n) suite géométrique de raison $q \neq 1$et de premier terme U_1 : $$U_1 + U_2 + \ldots + U_n = U_1 \times \frac{1 - q^{n}}{1 - q}$$

Exemple :

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = -2$ et $u_0 = 3$.
La somme des dix premiers termes de (u_n) est égale à :

$$\sum_{k=0}^{k=9} u_k = u_0 + \ldots + u_9 = 3 \times \frac{1 - (-2)^{9+1}}{1 - (-2)} = 1 - (-2)^{10} = -1\,023.$$