SUITES
FICHE 2 : Les suites arithmétiques

1°) Définition

a)Exemple

voici une suite de nombres à compléter

1 4 7 10 13 ... ...

On ajoute à chaque terme le même nombre 3 qui est la raison de la suite et on écrit :

$U_0 = 1$ $U_1 = U_0 + 3 = 1 + 3 = 4$ $U_2 = U_1 + 3 = 4 + 3 = 7$ etc…

b) Définition

Une suite est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n + r$$

r est la raison de la suite.

Exemples :

1) La suite des entiers naturels est un exemple de suite arithmétique :
   $U_0 = 0$ et r=1. => $U_0 =$ 0 $U_1 =$ 1 $U_2 =$ 2 …
2) Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 10$ et $U_{n+1} = U_n - 4$. Calculer les 6 premiers termes de (U_n).

Corrigé : $U_0 = 10$, $U_1 = U_0 - 4 = 6$, $U_2 = U_1 - 4 = 2$, $U_3 = U_2 - 4 = -2$,
$U_4 = U_3 - 4 = -6$, $U_5 = U_4 - 4 = -10$, $U_6 = U_5 - 4 = -14$
(On peut utiliser la calculatrice)

2°) Montrer qu'une suite est arithmétique

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique on démontre que pour tout entier naturel n

$$U_{n+1} - U_n = r$$

où r est la raison c'est – à – dire ***une constante indépendante de n***

Exemple : $U_n = 4 + 3n$, montrons que la suite est arithmétique
$U_{n+1} - U_n = 4 + 3(n + 1) - (4 + 3n) = 4 + 3n + 3 - 4 - 3n$ donc $U_{n+1} - U_n = 3$

Pour conclure l'exercice on écrit toujours :
(Un) est donc une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $U_0 = 4$.
Remarques : 1) **ATTENTION A NE PAS CONFONDRE U_{n+1} et $U_n + 1$**
Ex : Soit $U_n = 5n + 2$. Calculer U_{n+1} , $U_n + 1$ => corrigé : $U_{n+1} = 5n + 7$ $U_n + 1 = 5n + 3$

2) **Un placement à intérêts simples correspond à une suite arithmétique**

3°) Formule explicite d'une suite arithmétique

a) Le premier terme est U_0

Observation

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{U_1} = U_0 + 5 \\ \cancel{U_2} = \cancel{U_1} + 5 \\ \cancel{U_3} = \cancel{U_2} + 5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cancel{U_{n-1}} = \cancel{U_{n-2}} + 5 \\ U_n = \cancel{U_{n-1}} + 5 \end{array}\right\} \text{ on compte , on effectue la somme de n termes}$$

$U_n = U_0 + 5n$

Propriété

Si (U_n) est une suite arithmétique de **raison r**, **de premier terme U_0** alors , pour tout entier naturel n , on a

$$\boxed{U_n = U_0 + nr}$$

Exemple : (Un) suite arithmétique de raison 4 et de premier terme Uo = -3 alors Un = -3 +4n

b) Le premier terme est U_1

Si (U_n) est une suite arithmétique de **raison r**, **de premier terme U_1** alors, pour tout entier naturel n, on a

$$\boxed{U_n = U_1 + (n-1)\,r}$$

Exemple : (Un) suite arithmétique de raison -5 et de premier terme $U_1 = 10$ alors $U_n = 10 - 5\,(n-1)$ soit $U_n = 15 - 5n$.

c) Cas général

Pour tout entier naturel k

$$\boxed{U_n = U_k + (n-k)r}$$

4°) Sens de variation d'une suite arithmétique

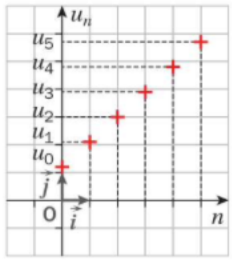
Propriété

On considère une suite (Un) arithmétique de raison r.

- Si r > 0 alors la suite (Un) est strictement croissante
- Si r<0 alors la suite (Un) est strictement décroissante
- Si r = 0 alors la suite (Un) est constante.

Exemple :

Un poêle consomme 1,2 kg de granulés de bois la première heure de chauffe, puis en consomme 0,9 kg chaque heure suivante.
On note u_n le nombre de kilogrammes de granulés de bois utilisés au bout de n heures de chauffe.
La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 0{,}9$ et de premier terme $u_0 = 1{,}2$.
Comme $r = 0{,}9 > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1{,}2 + 0{,}9n = f(n)$ avec $f(x) = 0{,}9x + 1{,}2$.



Les points du nuage sont alignés et appartiennent à la droite d'équation $y = 0{,}9x + 1{,}2$.

On reconnaît l'expression d'une fonction affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$ $(0{,}9 > 0)$.

5°) Somme des termes d'une suite arithmétique

a) Somme des n premiers entiers naturels non nuls

Propriété

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Exemple : $1 + 2 + \ldots + 20 = \frac{20\,(20+1)}{2} = \frac{20 \times 21}{2} = 210$

b) Somme des termes d'une suite arithmétique

Somme des n premiers termes -> 1[er] terme U_1	**Somme des n+1 premiers termes-> 1[er] terme U0**
(U_n) suite arithmétique de raison r et de premier terme U_1 : $U_1 + U_2 + \ldots + U_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$	(U_n) suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0 : $U_0 + U_1 + \ldots + U_n = \frac{(n+1)}{2}(U_0 + U_n)$

D'une façon générale : la Somme de termes d'une suite arithmétique est égale à

$$\text{Nombre de terme x } \left(\frac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}\right)$$

Exemple :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 1{,}2$.
Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{20}$.

Solution

1. a. La suite (u_n) est arithmétique de raison $-1{,}2$ et $u_0 = 5$.

On identifie la nature de la suite (u_n).

$u_{20} = u_0 + 20 \times (-1{,}2) = 5 - 24 = -19.$

$u_0 + u_1 + \ldots + u_{20} = (20 + 1) \times \frac{u_0 + u_{20}}{2} = 21 \times \frac{5 - 19}{2} = 21 \times (-7) = \boxed{-147.}$

On calcule le dernier terme de la somme en utilisant le terme général de (u_n).

b. La suite (v_n) est arithmétique de raison 2,5 et $v_0 = -12{,}9$.