SUITES
FICHE 3 : LE RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

1.La démonstration par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété P_n relative à un entier naturel n est vraie pour tout entier naturel n ou pour tout entier $n \geq 1$ ou pour tout entier $n \geq 2$ ou pour tout entier $n \geq n_0$ on doit démontrer que:

- INITIALISATION : On montre que la propriété P_0 est vraie ou que P_1 est vraie
- HEREDITE : On démontre que si P_n est vraie pour un entier n (ou un entier $n \geq 1$) alors P_{n+1} est encore vraie .
- CONCLUSION : on a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n ou pour tout entier $n \geq 1$ ou pour tout entier $n \geq 2$ ou pour tout entier $n \geq n_0$, la propriété P_n est vraie.

SURTOUT Ne pas oublier la conclusion : pour tout entier $n \geq$ no, P_n vraie.
Car les trois étapes de la démonstration sont importantes !

ATTENTION : Dans la démonstration par récurrence il ne faut pas oublier l'INITIALISATION. En effet l'omission de l'une des étapes peut conduire à des affirmations fausses. Enfin l'utilisation de la démonstration par récurrence ne se justifie pas toujours.

Contre – exemples :

1. Pour n= 2 puis n = 3 on a $n^2 \geq 2^n$ mais il est faux d'en déduire une propriété générale puisque $5^2 < 2^5$!!

2. P(n) : $7^n + 1$ est un multiple de 6. Si P(n) vraie pour un entier n de N alors P(n + 1) est vraie : Cependant P(0) est fausse !!!En fait P(n) est fausse pour tout entier n.

3. Pour démontrer que $2n^2 - 5n + 6 > 0$ pour tout entier naturel n, utiliser la récurrence est peu judicieux !

2. Des exemples à connaître et à retenir

Démontrer que

a) Pour tout entier n de N, $2^n \geq n + 1$

b) Pour tout entier n de N, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$

c) Pour tout entier n de N^*, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d) Pour tout entier n de N^*, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

e) Soit un réel $x \neq 1$ Alors pour tout entier naturel n $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} x^p = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$