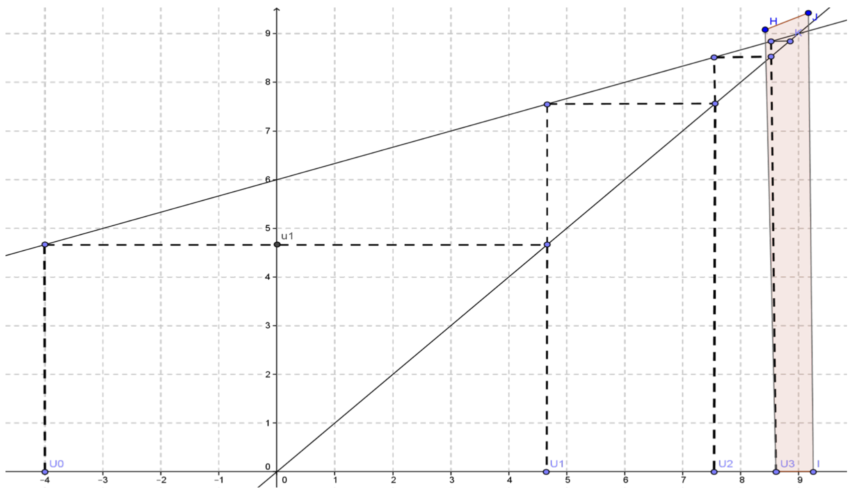
SUITES
FICHE 2 : Limite d'une suite

1°) Limite finie

On définit la suite (U_n) par $\begin{cases} U_0 = -4 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 6 \end{cases}$

Grâce à la calculatrice on a $U_1 = 4.66$ $U_2 = 7.54$ $U_3 = 8.57$ $U4 = 8.84$ $U_{21} = 8.99$

Observation



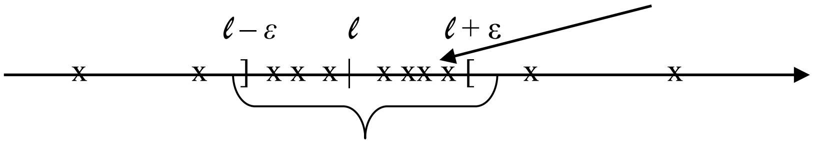
On voit clairement sur le schéma ci–contre que les valeurs de (Un) « s'agglutinent » de plus en plus dans la zone grisée .Dès que n>4 elles se rapprochent du point fixe qui est l'abscisse du point d'intersection de la droite y=x et de la courbe y=f(x) à savoir Xo = 9.
On dira que la valeur 9 est la limite de la suite (U_n) quand n tend vers $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 9$$

Définition

Dire qu'une suite (U_n) a pour limite un nombre réel ℓ signifie que tout intervalle ouvert I contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N. On dit que la suite (U_n) converge vers le réel ℓ.

Les termes s'accumulent autour de ℓ



Tous les termes U_n à partir d'un indice N sont dans un intervalle I.

On écrit $$\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$$

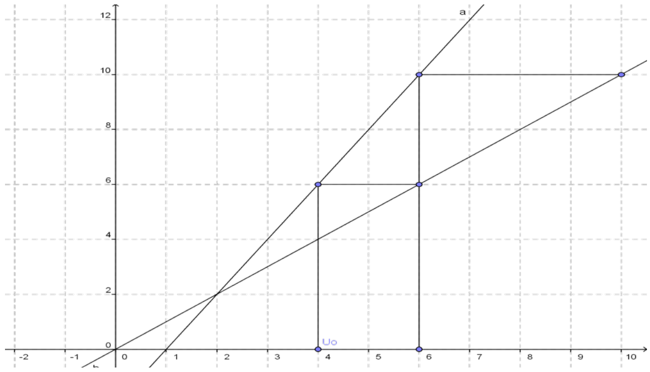
Remarque :.
Pour tout $n \geq N$ $U_n \in \,]\,l - \varepsilon \,;\, l + \varepsilon\,[$ (ou $|U_n - l| < \varepsilon$)

SUITES DE REFERENCE

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

Propriété : Si la suite (U_n) converge alors sa limite est unique

2°) Limite infinie



On voit clairement sur le schéma ci–contre que les valeurs de (Un) deviennent de plus en plus grandes

On dira que la suite (U_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$$

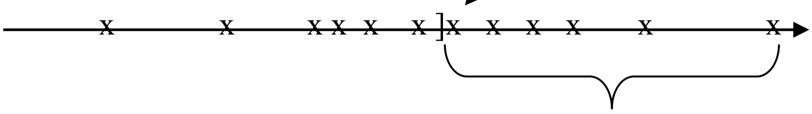
Définition

Dire qu'une suite (U_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty[$ ($]-\infty\,;A[$) contient tous les termes de la suite (U_n) à partir d'un certain rang.

Au plus un nombre Fini de U_n avec $n< N$

Les termes U_n arrivent à dépasser tout nombre A aussi grand soit – i l.

A $\qquad + \infty$



Tous les termes U_n à partir d'un indice N

On écrit

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty \qquad (\text{resp } -\infty)$$

On dit que la suite (U_n) diverge vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$)

Remarque : une suite qui n'a pas de limite est aussi divergente.

SUITES DE REFERENCE

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} n^P = +\infty$

c)Opérations et limites

lim U_n	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	L	L
lim V_n	L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
lim $U_n + V_n$	L + L'	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
lim $U_n \times V_n$	LL'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Signe(L)∞	–signe(L)∞
lim U_n / V_n	L/L'	?	?	?	0	0

lim U_n	0	$L\neq 0$	0
lim V_n	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0
lim $U_n \times V_n$	?	0	0
lim U_n / V_n	0	$+\infty$ ou $-\infty$	?

3°) Calculs d'une limite de suite

a) Suites géométriques

*Si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

*Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$

*Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

* Si $q \leq -1$ alors (q^n) n'admet pas de limite

Demonstrations exigibles voir livre p 24

b) Comparaison

POUR LES LIMITES FINIES :Théorème des gendarmes (admis)

Si à partir d'un certain rang $U_n \leq V_n \leq W_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = a$; $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = a$; Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = a$

POUR LES LIMITES INFINIES : Théorèmes de comparaisons

*Si à partir d'un certain rang $U_n \leq V_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ *Si à partir d'un certain rang $U_n \leq V_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

Attention : Démonstrations exigibles p 22

Remarque : Si à partir d'un certain rang $U_n \leq V_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = b$ Alors $a \leq b$

fiche pratique sur le calcul de limites de suites

Ex1 Limite de suites géométriques

a) Donner la limite de (U_n) où $U_n = 2^n$ $V_n = (\frac{1}{2})^n$; $W_n = (\cos \pi)^n$; $T_n = (-\frac{1}{4})^n + 1$.

b) Donner la limite de $K_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$

Ex2 Avec une racine carrée

Donner la limite de (U_n) où $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Ex 3 Lever une indétermination

Déterminer la limite en l'infini des suites suivantes

a) $U_n = n^2 - n$

b) $V_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n}$

Ex 4 Comparaison

a) $U_n = \frac{\cos n + 1}{n^2 + 2}$

b) $V_n = \sin n + n + 1$

Corrigé

Ex 1 : (U_n) est une suite géométrique dont la raison est 2 càd supérieure à 1 donc la suite diverge vers $+\infty$; 0 ; pas de limite ; 1

Ex2 On utilise la **méthode de l'expression conjuguée** .

$$U_n = \sqrt{(n+1)} - \sqrt{n} = \frac{n+1 - n}{\sqrt{(n+1)} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)} + \sqrt{n}} \qquad \lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

Ex 3 Lever une indétermination

Déterminer la limite en l'infini des suites suivantes

c) $U_n = n^2 - n$

Indéterminée $\infty - \infty$. On lève l'indéterminée en factorisant par le terme de plus haut degré

$U_n = n^2(1 - \frac{1}{n})$. comme $\lim \frac{1}{n} = 0$ $\lim (1 - \frac{1}{n}) = 1$

Or $\lim n^2 = +\infty$ donc par produit $\lim U_n = +\infty$

d) $V_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n}$

Indéterminée ∞ / ∞ . On lève l'indéterminée en factorisant par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur

comme $\lim \frac{1}{n} = 0$ et $\lim \frac{1}{n^2} = 0$ alors

$\lim (2 + \frac{1}{n^2}) = 2$

$V_n = \frac{n^2(2 + \frac{1}{n^2})}{n^2(1 + \frac{1}{n})} = \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}$ $\lim (1 + \frac{1}{n}) = 1$ et par quotient des limites $\lim V_n = 2$.

Ex 4 Comparaison

a) $U_n = \frac{\cos n + 1}{n^2 + 2}$

b) $V_n = \sin n + n + 1$

corrigés

a) Pour tout entier naturel n, $-1 \leq \cos n \leq 1$.

On a donc $1 - 1 \leq 1 + \cos n \leq 1 + 1$ soit

$0 \leq 1 + \cos n \leq 2$ soit $0 \leq \frac{1+\cos n}{n^2+2} \leq \frac{2}{n^2+2}$

On veut montrer que f (x) tend vers 0

alors on DOIT DONC UTILISER LE théorème des gendarmes

En effet comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2+2} = 0$

Alors d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

Pour tout entier naturel n, $-1 \leq \sin n \leq 1$.

On a donc $n + 1 - 1 \leq \sin n + n + 1 \leq n + 1 + 1$ soit

$n \leq V_n \leq n + 2$

b) On veut montrer que V_n tend vers $+ \infty$

alors on DOIT DONC UTILISER LE terme qui MINORE V_n

En effet comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n = + \infty$

Alors d'après le théorème de comparaison des limites $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = + \infty$