## SECOND DEGRE
## FICHE 1 : Equations du second degré.

### 1°) Généralités

**Définition 1**

Une équation du second degré est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b, c sont des réels donnés avec **$a \neq 0$.**

**Exemples :**

$3x^2 + 5x + 4 = 0$ a= 3, b = 5 , c = 4

$x^2 - 2x - 7 = 0$ a= 1, b = -2 , c = -7.

**Remarque : Il n'y a « rien » devant $x^2$ , le « 1 » est « caché » ou sous – entendu puisque $1 \times x^2 = x^2$**

**Attention : $(x + 2)^2 = x^2 + x + 1$ n'est pas une équation du second degré**.

En effet si on développe le terme de droite à savoir $(x + 2)^2$ on obtient l'équation équivalente suivante $x^2 + 4x + 4 = x^2 + x + 1$ soit $3x + 3 = 0$ qui est une équation du premier degré qui admet $-1$ pour solution.

**Définition 2**:

a,b,c 3 réels donnés ($a \neq 0$).La fonction f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto ax^2 + bx + c$ est appelée ***fonction trinôme du second degré***.

### 2°) Résolution et factorisation.

#### a)La forme canonique

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On démontre que (voir 84 du livre)

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Cette écriture est la ***forme canonique*** du trinôme.

**Définition 3** :Le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$. On peut alors écrire :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

**Exemples :** $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$

$4x^2 - x + 3 = 4\left[\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{48}{64}\right]$

**b)Résolution et factorisation .**Grâce à la forme canonique on démontre p 86-87 du livre le théorème suivant :

**Propriété 1 (résolution)**

a,b,c étant des réels tels que a≠0, on considère l'équation (E) $ax^2+bx + c =0$ et le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- **Si $\Delta>0$** (E) admet deux solutions distinctes ds |R :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- **Si $\Delta= 0$** (E) admet une seule solution ds |R : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

- **Si $\Delta< 0$ (E) n'admet pas de solutions dans |R.**

**Exemples** : Résoudre dans |R

$3x^2 + 2x -1 = 0$

$\Delta= (2)^2 - 4\times3\times(-1)=4+12=16$ S={-1 ; 1/3 }

$x_1=\dfrac{-2+4}{6}=\dfrac{1}{3}$

$x_2=\dfrac{-2-4}{6}=-1$

$16x^2 + 8x +1 = 0$

$\Delta= 0$

$x_0 = -\frac{1}{4}$

S={-1/4}

$-x^2 + x -1 = 0$

$\Delta= - 3$

Pas de solution dans R

S=∅

**Cas particulier** : Lorsque le trinôme est incomplet on peut résoudre l'équation sans utiliser Δ.

a) (b = 0) $4x^2 - 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{4}$

$x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$

S={- ½ ; ½ }

b) $x^2 + 2 = 0$

$x^2= -2$ or pour tout réel $x$

$x^2 \geq 0$ donc

S=∅

c) (c = 0) $2x^2 + x = 0$.

On factorise par $x$ d'où

$x\ (2x + 1) =0$

S={- ½ ; 0 }

**Remarque 1:** Ne jamais perdre de vue que c'est la variable $x$ que l'on cherche et que dans le discriminant la variable $x$ n'apparaît pas !

**Remarque 2 :** La calculatrice pour vérifier.

Faire un programme pour calculer Δ

**Propriété 2 (factorisation)**

$f(x) = ax^2 + bx +c$ avec $a \neq 0$ et avec les notations du théorème 1.

- Si $\Delta>0$ : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

- Si $\Delta= 0$ : $f(x) = a(x - x_0)^2$

- Si $\Delta< 0$ : $f(x)$ n'est pas factorisable dans |R en produit de facteurs du premier degré.

**Remarque :** On appelle racines du trinôme toute solution de l'équation (E).Si Δ= 0 on dit racine double.

**Exemples** : Donner lorsque c'est possible une factorisation des trinômes suivants

1) $f(x)=x^2 - 3x + 2$ 2) $g(x)= 5x^2 + 8x + 3$ 3) $h(x)= 9x^2 + 6x + 1$ 4) $p(x)= x^2 - 2x + 3$

| $f(x)=x^2 - 3x + 2$ | $g(x)= 5x^2 + 8x + 3$ | $h(x)= 9x^2 + 6x + 1$ | $p(x)= x^2 - 2x + 3$ |
|---|---|---|---|
| $\Delta= (-3)^2 - 4\times1\times(2)=9-8=1$<br>$x_1= 1$ $x_2 = 2$<br><br>$f(x)=(x - 1)(x - 2)$ | $\Delta= 4$<br>$x_1= -1$ $x_2 = -3/5$<br><br>$g(x)=5(x+3/5)(x+1)=(5x + 3)(x+1)$ | $\Delta= 0$<br>$x_0= -1/3$<br>$h(x)=9(x+1/3)^2$ | $\Delta= -8$<br>p($x$) n'est pas factorisable dans \|R en produit de facteurs du premier degré. |

## 3°) Somme et produit des racines

### a) Propriété 3

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta > 0$

| |
|---|
| f a alors deux racines distinctes $x_1$ et $x_2$ qui vérifient : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ |

Démonstration p 87

### b) Application : les racines évidentes

Regardons l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ . Si on remplace $x$ par 1 on obtient $1 + 2 - 3 = 0$ ce qui montre que 1 est solution de l'équation. On dit que 1 est solution évidente , l'autre solution est alors donnée par le quotient c/a c'est – à dire ici $-3/1 = -3$. Sans calculer de discriminant on a donc obtenu les deux solutions.

On a :

| Si $a + b + c = 0$ | Si $a - b + c = 0$ |
|---|---|
| 1 solution évidente et $\frac{c}{a}$ est l'autre solution | -1 solution évidente et $-\frac{c}{a}$ est l'autre solution |

***Exemples :*** Résoudre dans |R les équations suivantes

*a)* $x^2 - 5x + 4 = 0$ $1 - 5 + 4 = 0$ donc 1 solution évidente et 4 est l'autre solution $S = \{ 1 ; 4 \}$

b) $x^2 - 2x - 3 = 0$ $1 + 2 - 3 = 0$ donc -1 solution évidente et 3 est l'autre solution $S = \{ -1 ; 3 \}$

### c) Propriété 4

| |
|---|
| Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P SSI ils sont racines du trinôme du second degré $x^2 - Sx + P = 0$ |

**Exemple** : Quelles sont les dimensions d'un rectangle de périmètre 34 cm et d'aire 60 cm$^2$.

# SECOND DEGRE

## FICHE 2 : Variations . Représentation graphique et interprétation.

### 1°) Sens de variations

**Propriété**

Le sens de variation d'une fonction trinôme f définie par f( $x$ ) = a$x^2$ + b$x$ + c   dépend du signe de a

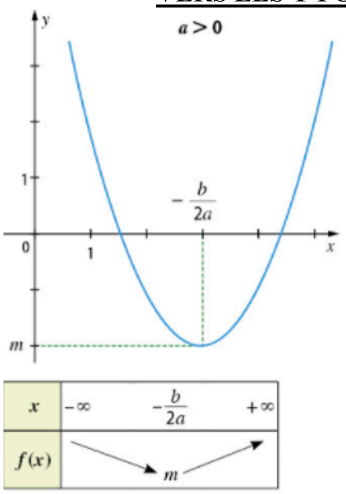
f admet un extrémum en $x = \frac{-b}{2a}$   et l'image de cet extrémum par f càd f( $\frac{-b}{2a}$ ) est   $-\frac{\Delta}{4a}$

| Si   a  est POSITIF | Si  a est  NEGATIF |
|---|---|
| <table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{-b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f($x$ )</td><td>↘</td><td>f( $\frac{-b}{2a}$ )</td><td>↗</td></tr></table> | <table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{-b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f ( $x$ )</td><td>↗</td><td>f( $\frac{-b}{2a}$ )</td><td>↘</td></tr></table> |
| f( $\frac{-b}{2a}$ )= $-\frac{\Delta}{4a}$   est un minimum | f( $\frac{-b}{2a}$ )= $-\frac{\Delta}{4a}$   est un maximum |

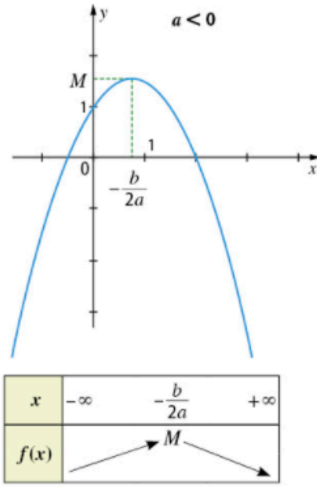
**Remarque** : voir démonstration p 85

**PARABOLE ORIENTEE**

**VERS LES Y POSITIFS**




**VERS LES Y NEGATIFS**




**Exemple** : Soit f la fonction trinôme définie par f ( $x$ ) = $-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ sur I = [ –6 ; 2]

| $x$ | -6 | - 2 | 2 |
|---|---|---|---|
| f ( $x$ ) | -3 ↗ | 5 | ↘ -3 |

**2°) Représentation graphique du trinôme**.

Dans la suite le plan est rapporté à un repère (O, i , j). f( $x$ ) = a$x^2$ + b$x$ + c   $a \neq 0$

**EQUATION DE LA PARABOLE DANS LE REPERE ORTHONORMAL ( O, i,j)**

L'équation de la parabole dans le repère ( O ; i , j ) est y = a$x^2$ + b$x$ + c . Grâce à la forme canonique elle peut aussi s'écrire :

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

ou

$$\boxed{y = a(x - \alpha)^2 + \beta}$$

où ke point S ($\alpha$; β ) est le sommet de la parabole avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et

$\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}$

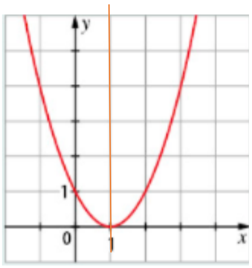
**Rappel : Pour montrer que la droite d'équation $x$ = a est axe de symétrie d'une fonction définie sur R ssi pour tout réel $x$**

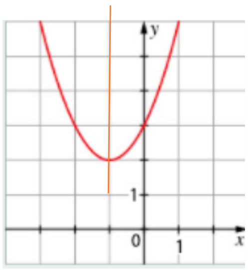
**f( a – $x$ ) = f( a + $x$ ) .**

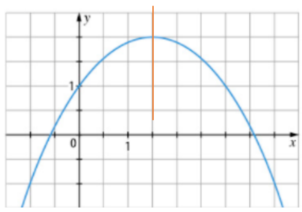
## Propriété et Définition

La représentation graphique du trinôme du second degré f est ***une parabole*** de ***sommet*** le point S( $\frac{-b}{2a}$ ; f( $\frac{-b}{2a}$ )) et ***d'axe de symétrie*** la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$

**Exemples :**



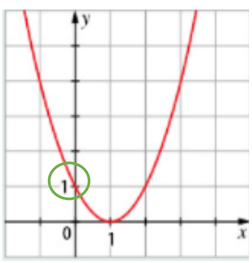



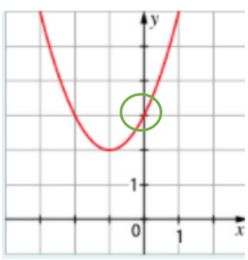

Equation de l'axe de symétrie : a) $x$ = 1   b) $x$ = -1   c) $x$ = 1,5

**REMARQUES**

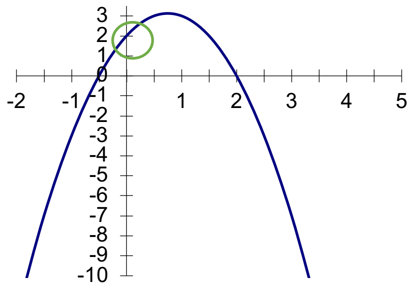
a ) Le point **C( 0,c)** est le **point d'intersection de P avec l'axe (O,j)**




f( $x$ ) = $x^2$ – 2$x$ + 1
f( 0 ) = 1




f( $x$ ) = $x^2$ + 2$x$ + 3
f( 0 ) = 3




f( $x$ ) = -2$x^2$ + 3$x$ + 2
f( 0 ) = 2

b) **Si Δ>0 , P coupe l'axe (O,i) aux points d'abscisses $x_1$ et $x_2$ qui sont les racines du trinôme.**

## FICHE 3 : Signe du trinôme. Inéquations du second degré

### 1°) Signe du trinôme

**ACTIVITE 4 P 83**

**Propriété 5 ( règle sur le signe du trinôme)**

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de f.

- **Si $\Delta>0$**

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de f($x$) | | sg(a) | 0 | sg(-a) | 0 | sg(a) | |

(en supposant par exemple ici que $x_1 < x_2$ sinon on aurait $x_2$ avant $x_1$ dans le tableau )

- Si $\Delta = 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f($x$) | | sg(a) | 0 | sg(a) | |

- Si $\Delta < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f($x$) | | sg(a) | |

**Remarque :** en clair si $\Delta>0$ : … **et si a positif** ( rappel : **a** est **le nombre « qui est devant $x^2$ »** ) alors

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de f( $x$ ) | | + | 0 | — | 0 | + | |

**…Et si a négatif**

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de f( $x$ ) | | — | 0 | + | 0 | — | |

**Exemples :**

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

a = 1 donc c'est le cas où a positif

$\Delta = 16$ $x_1 = -3$ $x_2 = 1$

ici $-3 < 1$ donc

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f($x$) | | + | 0 | - | 0 | + | |

$g(x) = 4x^2 + 4x + 1$

a = 4 donc c'est le cas où a positif

$\Delta = 0$ $x_0 = -\frac{1}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f($x$) | | + | 0 | + | |

$h(x) = -x^2 + 5x + 6$

a = -1 donc c'est le cas où a négatif

$\Delta = 49$ $x_1 = 6$ $x_2 = -1$

ici $-1 < 6$ donc

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f($x$) | | - | 0 | + | 0 | - | |

$I(x) = -2x^2 + 5x + 8$

a = -2 donc c'est le cas où a négatif

$\Delta = -39$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f($x$) | | - | |

## 2°) Résolution d'inéquations.

**a) Méthode :** étape 1 : on étudie le signe du trinôme donné dans un tableau d'après le théorème sur le signe du trinôme
étape 2 : En lisant le tableau on peut alors résoudre l'inéquation.

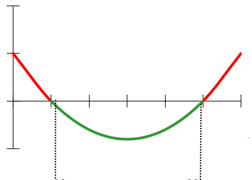
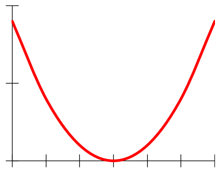
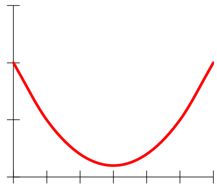
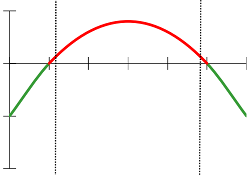
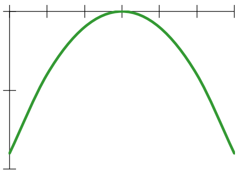
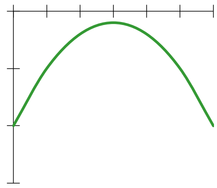
**b )Exemples :**

Résoudre dans |R les inéquations suivantes :

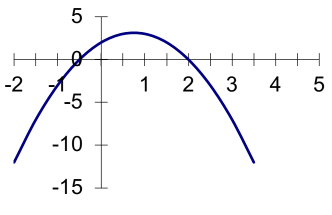
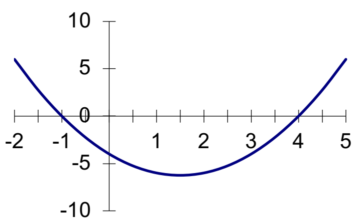
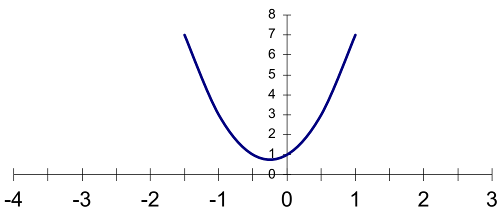
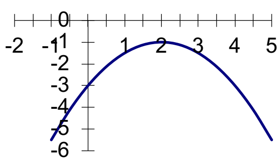
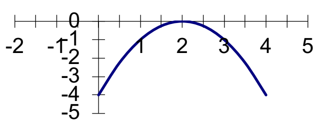
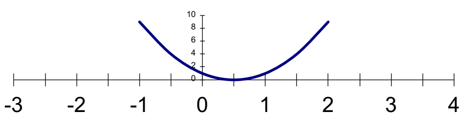
| $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ | $4x^2 + 4x + 1 > 0$ | $-x^2 + 5x + 6 > 0$ | $-2x^2 + 5x + 8 \geq 0$ |
|---|---|---|---|
| On effectue l'étude ci – dessus<br>Et on a S =] -∞;-3] U[1;+∞[ | On effectue l'étude ci – dessus<br>Et on a S =R\{0}=R* . | On effectue l'étude ci – dessus<br>Et on a S =]-1 ;6[ | On effectue l'étude ci – dessus<br>Et on a S =Ø |

## 3°) Interprétation graphique

On suppose ici que $x_1 < x_2$ si $\Delta > 0$

| | $\Delta > 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta < 0$ |
|---|---|---|---|
| **COURBE avec a > 0** « courbe à l'endroit » |   |   |  |
| **SIGNE** | + 0 - 0 + | + 0 + | + |
| **COURBE avec a < 0** « courbe à l'envers » |  |  |  |
| **SIGNE** | - 0 + 0 - | - 0 - | - |

**Exercices :** Donner dans chaque cas le signe du trinôme f(x) à l'aide de sa courbe.

| | | |
|---|---|---|
| <br>a -0.5 2<br>- 0 + 0 - | <br>b -1 4<br>+ 0 - 0 + | <br>C<br>+ |
| <br>d<br>- | <br>e<br>2<br>- 0 - | <br>0.5<br>f + 0 + |