PROBABILITES CONDITIONNELLES.

I) Définitions et propriétés

ACTIVITE

1°) Définition 1

Si $P(A) \neq 0$, on appelle probabilité de B sachant A, notée $P_A(B)$ le quotient suivant :

$$\mathbf{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Exemple : On considère un univers Ω muni d'une loi de probabilité P et deux événements A et B de Ω de probabilité non nulle, tels que :

$P(A \cap B) = 0{,}4$ $P(A) = 0{,}5$ alors $P_A(B) = 0{,}8$.

2°) Définition 2

Soit P une probabilité sur un univers E et A un événement tel que $P(A) \neq 0$.

L'application $P_A : E \longrightarrow [0\,;1]$ est appelée **probabilité conditionnelle sachant A**.

$B \longmapsto P_A(B)$

3°) Propriétés immédiates

1. $0 \leq P_A(B) \leq 1$
2. Si $A \cap B = \varnothing$ alors $P_A(B) = 0$.
3. $P_A(A) = 1$ $(P(A) \neq 0)$
4. $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
5. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$

Preuves :

1. $A \cap B$ est une partie de B donc $P(A \cap B) \leq P(A)$. Comme les probabilités sont positives on a donc $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$ et $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq 0$. D'où le résultat.
2. Immédiat
3. Immédiat
4. $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})}{P(A)}$

Or $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = A$ et $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \varnothing$ d'où le résultat.

5. Probabilités conditionnelles.

Remarque : P(B) ≠ 0

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ATTENTION :

l'erreur la plus courante est de confondre par ex $P(A \cap B)$ et $P_A(B)$.
La probabilité de $A \cap B$ c'est la probabilité que A et B se réalisent en même temps alors que $P_A(B)$ c'est le calcul de la probabilité de B dans le cas où A s'est déjà réalisé.

II) Arbres de probabilités

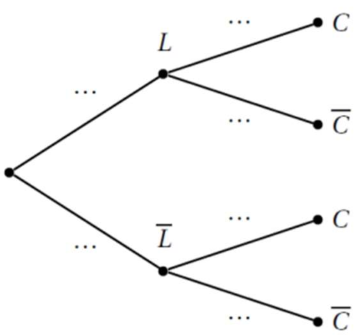
1°) Exemple

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires. L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

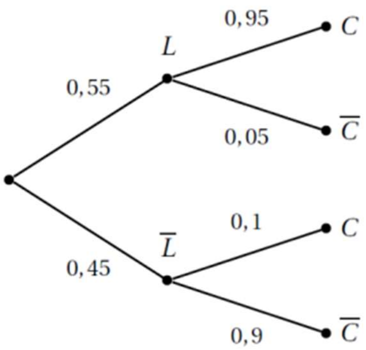
On choisit un élève au hasard dans le lycée. On considère les événements suivants :

L : « l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi » ;

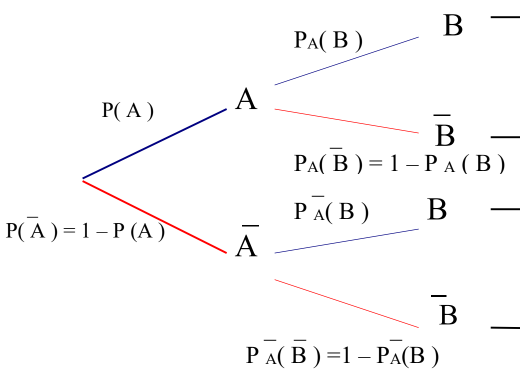
C : « l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire ».



- Comme 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi, $p(L) = 0,55$ (et $p(\overline{L}) = 1 - 0,55 = 0,45$).
- Comme parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire, on a $p_L(C) = 0,95 (et p_L(\overline{C}) = 1 - 0,95 = 0,05)$.
- Puisque,parmi les élèves qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire, on a $p_{\overline{L}}(C) = 0,1 (et p_{\overline{L}}(\overline{C}) = 1 - 0,1 = 0,9)$.



2°) Arbre dans le cas élémentaire de deux évènements contraires



$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B}) = P(A) \times (1 - P_A(B))$

$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = (1 - P(A)) \times P_{\overline{A}}(B)$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B}) = P(\overline{A}) \times (1 - P_{\overline{A}}(B))$

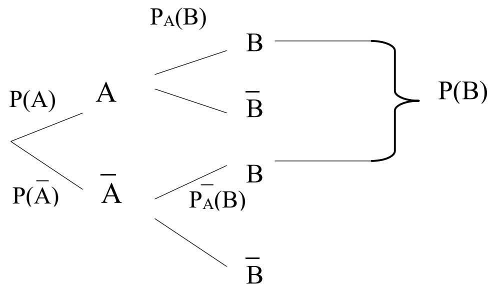
$= (1 - P(A)) \times (1 - P_{\overline{A}}(B))$

III) Probabilités totales

Propriété

> E est un univers et A est un événement de E tel que $P(A) \neq 0$. Pour tout événement B
>
> $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(A) . P_A(B) + P(\overline{A}) . P_{\overline{A}}(B)$

Remarque : On a $E = A \cup \overline{A}$, c'est une partition de E.



Définition

> E est un univers . Pour un entier naturel $n \geq 2$ si A_1 ; A_2 ; … et A_n sont n évts tels que
>
> $P(A_i) \neq 0$ pour tout i =1,2,…,n
>
> $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$
>
> $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$
>
> $\Bigg\}$ les événements A_1 ; A_2 ; … et A_n forment une **partition** de E.

Formule des probabilités totales

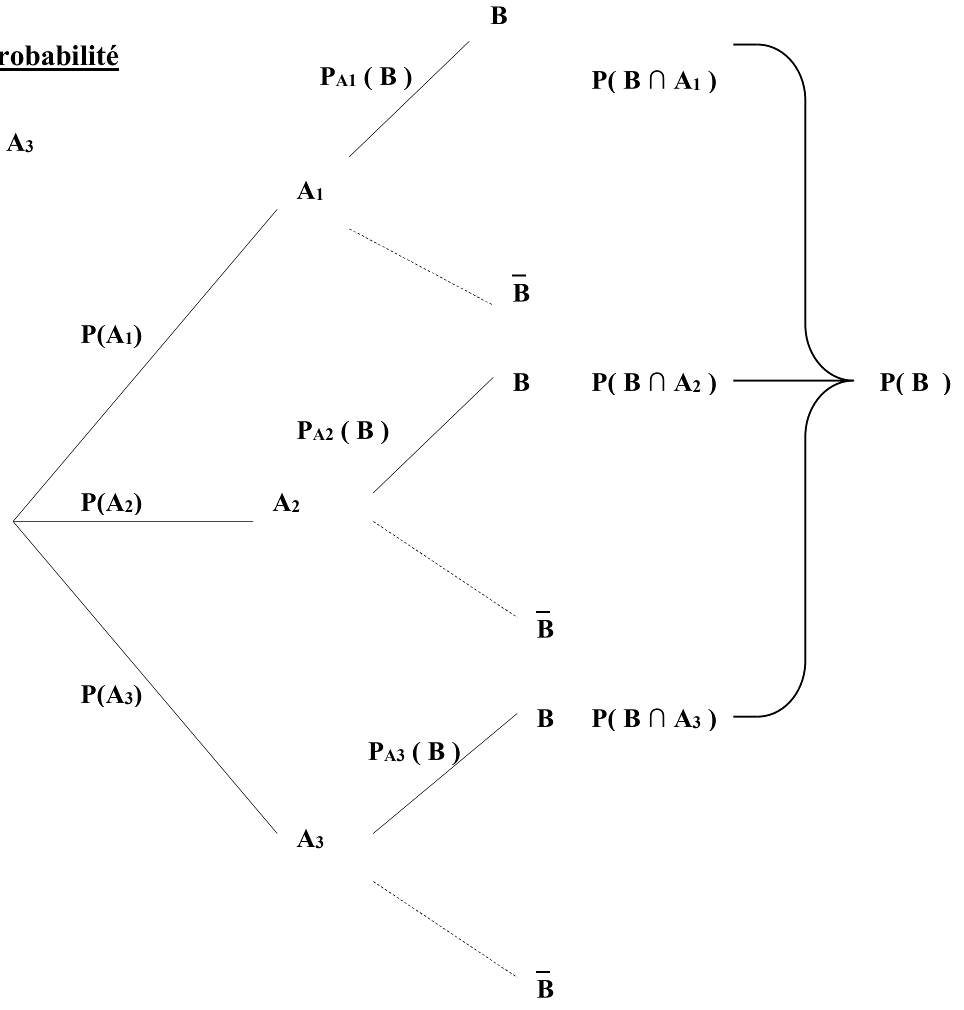
> Soit A_1 ; A_2 ; … et A_n une partition de E. B un événement quelconque de E.
>
> **$P(B)=P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)+\ldots+ P(B \cap A_n)$ soit encore**
>
> **$P(B) = P_{A_1}(B).P(A_1)+ P_{A_2}(B).P(A_2)+\ldots+P_{A_n}(B).P(A_n)$**

Preuve p 332

Ex d'application : 2 p 333

Un arbre de probabilité

E = $A_1 \cup A_2 \cup A_3$



Exemple :

1.Un test medical concernant une allergie à un produit X est effectué sur la totalité d'une population. Une étude statistique établit que 70 % de la pop Réagit négativement au test(evt N) ; 20 % réagit faiblement au test (evt F) et 10% réagit fortement au test (evt R) .

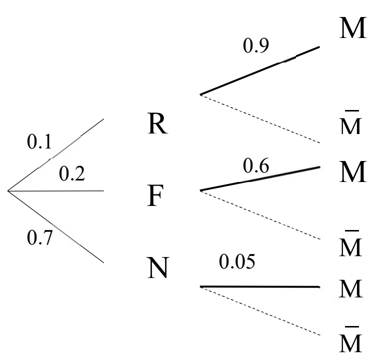
La probabilité pour une personne de cette population soit allergique au produit X (evt M) est

0.9 qd le test est fortement positif/0.6 qd le test est faiblement positif/0.05 qd le test est négatif

Faire l'arbre pondéré et calculer P(M)

CORRIGE

1.



$\boxed{P(M) = P_R(M).P(R) + P_F(M).P(F) + P_N(M).P(N) = 0.245}$

IV) Evénements indépendants

Définition

Deux événements A et B sont dits **INDEPENDANTS** lorsque $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

Remarques : $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

A et B sont indépendants ssi $P_A(B) = P(B)$

A et B sont indépendants ssi $P_B(A) = P(A)$.

Exemple :

Dans un sac on a 4 boules bleues numérotées 1 , 1 , 2 , 3 et 6 boules rouges numérotées 1 , 1 , 1 , 2 , 3 et 4 indiscernables au toucher .On en tire une au hasard. On considère l'événement B : « la boule tirée est bleue » et l'événement R : « la boule tirée est rouge », l'événement Q : « la boule tirée porte le n°4 » et l'événement U : « la boule tirée porte le n°1 ».Calculer les probabilités de ces événements. Que peut –on dire des événements B et U ? Q et B ?

$P(B) = 4/10$ $P(R) = 6/10$ $P(Q) = 1/10$ $P(U) = 5/10 = ½ = 2/4 = P_B(U)$ donc U et B sont indépendants
$P_B(Q) = 0$ et $P(Q) = 1/10$ donc B et Q ne sont pas indépendants

REMARQUE : dans cet exercice on constate qu'il ne faut pas confondre événements indépendants et événements disjoints

Voir p 332 du livre théorème + démonstration