PROBABILITES

FICHE 1 :Combinatoire

I) Ordre sans répétition

1°)Nombre de permutations

Définition

Etant donné n éléments d'un ensemble fini E, le nombre de façons de les ranger de toutes les manières possibles ou le nombre de permutation des n éléments de E, est le produit de tous les entiers de 1 à n c'est – à – dire

$$n\,! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$$ (on lit « factorielle n »)

Par convention 0 != 1 = 1 !

Exemple : 8 athlètes s'élancent au départ d'une course de 100 m. Combien y a-t'il d'ordres d'arrivée possibles en supposant qu'il n'y a ni abandon ni ex-aequo.

Ordre sans répétition donc nombre de 8-uplets d'un ensemble à 8 éléments ou nombre de permutations d'un ensemble de 8 éléments. On obtient 8 !

2)Nombre d'arrangements

On considère un ensemble E contenant n éléments et soit p un entier inférieur ou égal à n

Définition

Etant donné n objets le nombre de façons de ranger p de ces objets p≤n de toutes les manières possibles est

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n\,!}{(n-p)\,!}$$

Exemple : Sur son piano Hugo joue avec sept notes seulement. Combien de mélodies différentes peut-il obtenir avec 5 notes distinctes.

Dans une mélodie l'ordre est important et les notes sons toutes distinctes donc on a Ordre sans répétition. On veut donc le nombre de 5-uplets d'un ensemble de 7 éléments. Donc 7 !/5 != 2520.

II) « Désordre » sans répétition : Combinaisons

Théorème et définition

Soit E un ensemble contenant n éléments et **p entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.**

Une combinaison de p éléments choisis parmi n est une partie de E contenant p éléments pris parmi les n éléments de E.
Le nombre de parties à p éléments de E ou le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n se note $\binom{n}{p}$, on lit « p parmi n » :

$$\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{\mathbf{p} \times (p-1) \times \ldots \times 2 \times 1} = \frac{n\,!}{\mathbf{p\,!\,(n-p)\,!}}$$

Exemples :

1. Un damier contient 16 cases. Combien y a-t-il de façon de placer 3 jetons sur ces cases à raison d'un seul jeton par case ?
2. On marque 16 points dans un plan de telle sorte que trois qcq ne soient pas alignés : combien peut –on former de triangles ayant leurs sommets parmi ces points ?
3. Une urne contient 10 boules blanches et 15 rouges. On choisit simultanément quatre boules de l'urne.
   a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   b. Combien de tirages comportent deux blanches et deux rouges.

1. Placer trois jetons sur trois cases c'est comme choisir trois cases parmi 16 soit choisir une partie à 3 éléments dans un ensemble de 16 éléments

$$\binom{16}{3} = \frac{16 \times 15 \times 14}{\mathbf{3 \times 2 \times 1}} \mathbf{= 560}$$

2. C'est exactement le même raisonnement que ci- dessus donc 560 triangles.
3. a.

$$\binom{25}{4} = \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22}{\mathbf{4 \times 3 \times 2 \times 1}} \mathbf{= 12560}$$

b. On choisit 2 boules blanches parmi 10 donc

$$\binom{10}{2} = 45$$

On choisit 2 boules rouges parmi 15 donc

$$\binom{15}{2} = 105$$

Le nombre total de choix est donc 45x105 = 4725 puisqu' à chaque choix de boule blanche on peut associer l'un des 105 choix de boules rouges et ceci 45 fois.

Propriétés

n et p sont des entiers naturels avec $p \leq n - 1$ et $n \geq 1$

1.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

2.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

3.

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

4.

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Preuves : 1. L'ensemble E ne comporte qu'une partie « vide » et une seule partie ayant n éléments, c'est – à – dire l'ensemble E lui – même, d'où le résultat.

2.Si une partie A de E possède p éléments , la partie complémentaire de A dans E ou $\overline{A}$ en possède n – p , il ya donc autant de parties à p éléments que de parties à n – p éléments.

3. Conséquence du 2 avec p = 1 et il y a n parties ayant 1 éléments.

4. **Algébriquement :**

$$\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} = \binom{n}{p}$$

Après réduction au même dénominateur.

Ou avec les parties :

E est un ensemble à n éléments et soit x un élément de E.

E contient donc n – 1 éléments autres que x.

Soit A une partie de E ayant p éléments. Deux cas se présentent :

Si x est dans A alors les p – 1 éléments de A sont choisis parmi les n – 1 éléments de E

Si x n'est pas dans A alors les p éléments de A sont choisis parmi les n – 1 éléments de E.

Or le nombre de parties de E à p éléments contenant x ajouté au nombre de parties de E à p éléments ne contenant pas x donne le nombre de parties de E à p éléments.

Exercice

Une urne contient 4 boules : 2 boules rouges et deux boules blanches. On tire simultanément 2 boules. Combien de tirages contiennent p boules rouges, p variant de 0 à 2 puis en déduire que

$$\binom{4}{2} = \sum_{p=0}^{2} \binom{2}{p}^2$$

0R 2 B	1R1B	2R0B
$\binom{2}{0} \times \binom{2}{2} = \binom{2}{0}^2$	$\binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = \binom{2}{1}^2$	$\binom{2}{2} \times \binom{2}{0} = \binom{2}{2}^2$

Formule de Pascal et formule du binôme de Newton

Théorème

Soit a et b deux nombres réels (ou complexes) et un entier naturel non nul. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^{p} = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Preuve : démonstration par récurrence à savoir p 263

Exemples :

1. Calculer $(a+b)^6$
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer $N = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$ puis $S = \sum_{p=0}^{n} p \binom{n}{p}$

1. $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

2. $(1+1)^n = N = 2^n$. $f(x) = (1+x)^n$ donc $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ mais aussi

$$f'(x) = \binom{n}{1} + 2x\binom{n}{2} + \ldots + nx^{n-1}\binom{n}{n}$$ d'où $S = f'(1) = n2^{n-1}$.

Résolution : On présente les résultats sous forme d'un tableau.

Pour $p > n$, $\binom{n}{p}$ n'est pas défini (on peut aussi décider qu'il est nul).

Ainsi, aucun terme ne figure au-dessus de la diagonale sont tous nuls.
De plus, la formule de PASCAL s'interprète dans le tableau de la façon suivante : un nombre intérieur au « triangle » est égal à la somme des deux termes de la ligne précédente situés immédiatement au-dessus et immédiatement à gauche.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$

On obtient :

$\binom{7}{0} = 1$; $\binom{7}{1} = 7$; $\binom{7}{2} = 21$; $\binom{7}{3} = 35$, etc.

PROBABILITES

FICHE 2 : LOI BINOMIALE

I) Schéma de Bernouilli

Loi de Bernouilli

Soit E une expérience aléatoire présentant deux issues: l'une S, que l'on appelle **« succès »** de probabilité

p et l'autre $\overline{S}$, appelée **« échec »** de probabilité q = 1 – p .

Définition et propriété

La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est appelée

VARIABLE ALEATOIRE DE BERNOUILLI

X	0	1
P(X= *x*)	1 – p	p

La loi de probabilité de cette variable aléatoire X est appelée LOI DE BERNOUILLI

P(X = 1) = p et P(X = 0) = 1 – p .

Propriétés

Soit X une variable aléatoire de Bernouilli.

E(X) = p

V(X) = E(X^2) – [E (X)] ^{2} = p – p^2 donc V(X) = p(1 – p) .

σ (X) = √ p(1 – p)

II) Schéma de BERNOUILLI .Loi Binomiale

1°) Exemple :

On lance quatre fois de suite, successivement et indépendamment, un dé cubique parfaitement équilibré et on considère le jeu suivant :

- Si le dé tombe sur un numéro supérieur ou égal à 5 on a gagné. C'est l'événement S comme succès.
- Sinon on a perdu. C'est l'événement E comme échec.

On a une situation d'équiprobabilité.
1°) Quelle est la probabilité p de gagner ?
2°) Quelle est la probabilité de l'événement : « les 4 lancers sont des succès ».(on rappelle l'indépendance des lancers.)
3°) Quelle est la probabilité de l'événement : « Obtenir au moins un succès au cours des 4 lancers »
4°) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus au cours des 4 lancers
Donner la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance.
5°) Dans la suite on lance n fois successivement ce même dé. Exprimer, en fonction de k et de n les probabilités
$P(X = k) = p_k$ où k est un entier naturel compris entre 0 et n.

1°) $p = 1/3$
2°) $(1/3)^4$
3°) $1 - (2/3)^4$
4°)

X	0	1	2	3	4
P(X = x)	16/81	32/81	24/81	8/81	1/81

$E(X) = (32+48+24+4)/81 = 108/81 = 4/3 = 4p$

$V(X) = 8/9 = 4p(1 - p)$

$$P_k = \begin{pmatrix} k \\ \\ n \end{pmatrix} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Définitions

On REPETE n FOIS et de manière INDEPENDANTE une même expérience qui a deux issues, S et $\overline{S}$,

de probabilités respectives p et $q = 1 - p$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès au cours

de ces n expériences s'appelle

LA LOI BINOMIALE de paramètres n et p notée **B(n , p).**

Propriété

Pour tout entier k compris entre 0 et n $P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Exemple : On lance un dé non truqué 10 fois de suite et on s'intéresse au nombre X de fois où l'on obtient un multiple de 3. X = B(10 ; 1/3).

Propriétés admises

$E(X) = np$

$V(X) = np(1 - p) = npq$

$\sigma(X) = \sqrt{npq}$

Remarque : ILFAUT SAVOIR reconnaître un schéma de Bernouilli dans les exos : on a des épreuves indépendantes avec deux issues possibles.

Exemple1 : On veut ranger trois boules distinctes numérotées de 1 à 3 dans deux cases A et B. On suppose que Chacune des cases peut contenir de 0 à 3 boules. La place des boules dans les cases est considérée comme sans importance.
Soit X la VA qui à tout rangement associe le nombre de boules contenues dans la case A.

1. Déterminer la loi de proba de X
2. Calculer E(X).

Corrigé

1.

X	0	1	2	3
P(X = x)	1/8	3/8	3/8	1/8

2.
$E(X) = 3/2$ $n = 3$ et $p = 1/2$

Exemple2 : 5% des hommes sont daltoniens. Quelle est la probabilité pour que sur 3 hommes pris au hasard Il y en ait exactement deux qui le soit.

$n = 3$ $p = 0,05$ et $k = 2$ $\quad P(X = 2) = \binom{3}{2}(0,05)^2(1 - 0,05) \approx 0,007.$

REMARQUES :

1. Si on lance 120 fois un dé , on peut s'attendre à obtenir 20 fois un « 2 » en moyenne : c'est l'espérance de la loi binomiale B(120 ; 1/6) .

2. Si on lance 50 fois une pièce, on peut s'attendre à obtenir 25 « pile » en moyenne : c'est l'espérance de la loi binomiale B(50 ; ½) .

3. **Conditions d'application de la loi binomiale**.
Chaque expérience prise isolément ne présente que DEUX ISSUES : succès et échec.
LE SUCCES A TOUJOURS LA MEME PROBABILITE POUR CHAQUE EXPERIENCE
IL Y A INDEPENDANCE ENTRE CHACUNE DES EXPERIENCES SUCCESSIVES

C'est le cas par exemple d'un tirage AVEC REMISE dans une urne.

4. $\sum^{n} \binom{n}{\ } p^k(1 - p)^k = (p + 1 - p)^n = 1$ d'après la formule du binôme de Newton

$k = 0 \quad k$

Exemples :

1.Une étude statistique portant sur plusieurs années a montré que, dans une certaine population,
La fréquence de naissance d'une fille est 0,45. On suppose que le sexe d'un enfant à la naissance ne dépend pas du sexe de l'enfant précédent. On s'intéresse au nombre de filles dans les familles de 5 enfants.

a) Etudier la loi de probabilité de la variable X égale au nombre des filles dans ces familles.
Dresser un tableau de valeurs pour cette loi et une représentation graphique. Quelle est la valeur de X la plus probable dans ces familles.

b) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

2. Au jeu du Loto, on choisit 6 nombres parmi les nombres entiers de 1 à 49.

a) Quelle est la probabilité de choisir les six bons numéros ?

b)Un personne joue chaque semaine pendant 10 ans : quelle est la probabilité de gagner au moins une fois ?

Corrigés

1.

a)

Pour tout entier k compris entre 0 et 5 $P(X = k) = \begin{pmatrix} 5 \\ k \end{pmatrix} (0,45)^k (0,55)^{5-k}$.

$X = 2$

b) $E(X) = 2,25$ $V(X) = 1,2375$ $\sigma(X) \approx 1,112$

2. a) $A = \begin{pmatrix} 49 \\ 6 \end{pmatrix} = 13\,983\,816$

$p = 1/A = 7,2 \times 10^{-8}$

b) $P(Y \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^{551} \approx 3,7\ 10^{-5}$.