# PROBABILITES DE BASE

## I UNIVERS -EVENEMENTS - EVENTUALITES

### 1°) VOCABULAIRE

Pour introduire ces nouvelles notions on va étudier un exemple.

On lance un dé non pipé et on s'intéresse au résultat porté sur sa face supérieure.

On peut obtenir 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

Ce sont les **éventualités** ou **cas possibles**.

- L'ensemble de toutes les éventualités c'est-à-dire dans notre exemple {1,2,3,4,5,6} est **l'univers Ω.**
- Un **événement** est une partie de l'univers .

  EXEMPLE : Dans le cas du dé on considère l'événement A :« obtenir un nombre pair ».

  A= {2 ,4 ,6}

  On considère maintenant l'événement B : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 3 »

  B= {1,2, 3}

- Un **événement élémentaire** est un événement qui a un seul élément .

  EXEMPLE : L'événement $e_1$ : « Obtenir 1 » soit $e_1$= {1} ( c'est le singleton {1})
  L'événement $e_2$ : « Obtenir 2 » soit $e_2$= {2}( ‘' ‘' {2} )
  etc....

- **L'événement impossible** est désigné par l'ensemble vide noté ∅

  EXEMPLE : L'événement T: « Obtenir un nombre supérieur à 7 »

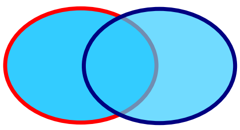
- **L'événement certain** est l'univers Ω tout entier.

  EXEMPLE : L'événement G : « Obtenir un nombre entier compris entre 1 et 6 »

### 2°) OPERATIONS SUR LES EVENEMENTS

#### a) NOTIONS A CONNAITRE

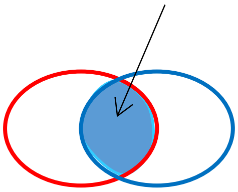
- REUNION DE 2 ENSEMBLES



$A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **OU** à B.

Remarque : Quand il y aura **OU** dans la définition d'un événement cela se traduira mathématiquement par $\cup$.(**union**).

- INTERSECTION DE 2 ENSEMBLES .



$A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A **ET** à B.

Remarque : Quand il y aura **ET** dans la définition d'un événement cela se traduira mathématiquement par $\cap$. (**intersection**).

**EXEMPLE** : 1.Dans le cas du dé déterminer

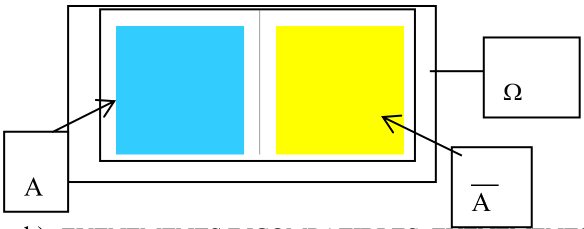
l'événement A : « obtenir un nombre pair » ; A = {2, 4,6}
l'événement B : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 » B = {1, 2, 3, 4}
l'événement C : « obtenir un nombre pair ou un nombre inférieur ou égal à 4 »
$C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
l'événement D : « obtenir un nombre pair et un nombre inférieur ou égal à 4 »
$D = A \cap \mathbf{B} = \{2, 4\}$

2. En utilisant les événements E={1,2} et H={1,3,5} ,donner une définition (« avec des mots ») des événements suivants :
G={1,2,3,5} et F = { 1}.

l'événement E: « obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 »
l'événement H: « obtenir un nombre impair » ;
l'événement G : « obtenir un nombre impair ou un nombre inférieur ou égal à 2 »
l'événement F : « obtenir un nombre impair et un nombre inférieur ou égal à 2 »

- COMPLEMENTAIRE D'UN ENSEMBLE

Soit $\Omega$ un ensemble ; $A \subset \Omega$.
Le **complémentaire de A** dans $\Omega$ noté $\overline{A}$ est l'ensemble des éléments de $\Omega$ qui **n'appartiennent pas à A** .




Remarque :
$A \cap \overline{\mathbf{A}} = \emptyset$

b) EVENEMENTS INCOMPATIBLES, EVENEMENTS CONTRAIRES.

- Définition 1 : Deux événements A et B sont **incompatibles** lorsque $\mathbf{A \cap B = \emptyset}$ .

EXEMPLE : Donner dans le cas du dé l'exemple de deux événements incompatibles.
A : Obtenir un nombre pair et B :obtenir un nombre impair
A= {2 , 4 , 6} B = { 1, 3, 5 } $A \cap \mathbf{B} = \emptyset$
C : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 » D « obtenir 5 » $C \cap \mathbf{D} = \emptyset$

- Définition 2 : Si A est un événement d'un univers $\Omega$ , alors le complémentaire $\overline{A}$ est **l'événement contraire** de A .

EXEMPLE : Déterminer les événements contraires de A et B où

A : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 3 » $A = \{1, 2, 3\}$
B : « obtenir un nombre pair ou inférieur ou égal à 3 » $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$\overline{A}$ : « obtenir un nombre strictement supérieur à 3 » $\overline{A} = \{4,5,6\}$

$\overline{B}$ : « obtenir un nombre impair et strictement supérieur à 3 » $\overline{B} = \{5\}$

## II CALCUL DE PROBABILITES

### 1°) DEFINITION

Dans le cas du dé si je considère l'événement élémentaire $e_1$ : « obtenir 1 », j'ai « une chance sur 6 » de réaliser cette éventualité .

$\frac{1}{6}$ est la probabilité de l'événement $e_1$. on note $P(e_1) = \frac{1}{6}$ .

**Définition : La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.**

EXEMPLE : Dans le cas du dé si $A = \{1,2\}$ $P(A) = P(e_1) + P(e_2) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3$.

### 2°) PROPRIETES

- $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$
- $\mathbf{P(\Omega)=1}$.

**Remarque importante** : soit $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un univers contenant n événements élémentaires alors

$$\boxed{P(e_1) + P(e_2) + \ldots + P(e_n) = 1 .}$$

- $\mathbf{P(\emptyset)=0}$
- $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Remarque : Si A et B sont incompatibles càd si $A \cap B = \emptyset$ alors

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)} .$$

- Evénements contraires :

$$\mathbf{P(\overline{A}) = 1 - P(A).}$$

### 3°) Equiprobabilité

Soit $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un univers contenant n événements élémentaires .Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité à savoir $\frac{1}{n}$ on dit que l'on est dans un cas **d'équiprobabilité**

Si A est un événement on a alors :

$$\boxed{\mathbf{P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}}$$

EXEMPLE : Quelques cas d'équiprobabilité

- Lancer de dés non pipés ;
- Tirage d'une carte
- Tirage d'un jeton

Pile ou face etc...