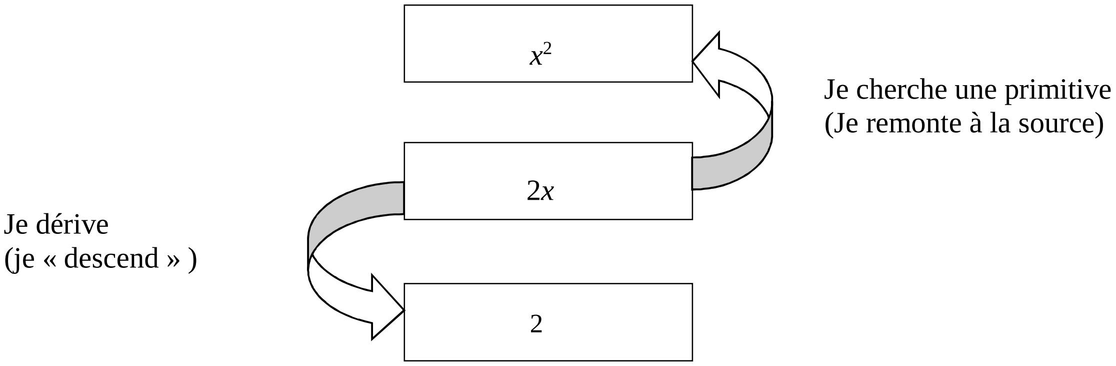
PRIMITIVES

1°) Etude d'un exemple simple

On sait très facilement calculer la dérivée de la fonction f (x)=2x ; c'est f '(x) = 2 .
On veut savoir maintenant ce que l'on va obtenir si on fait le chemin « à l'envers ».En effet je voudrais trouver une fonction F dont la dérivée est f c'est-à-dire que je cherche F telle que F '(x)= 2x.

Ici il est facile de voir que la fonction F(x) = x^2 est une solution à notre problème.

On dit que F est **une primitive** de f. On peut symboliser la démarche à l'aide du schéma ci-dessous :



Exercice

Etant donnée une fonction f déterminer une primitive de f c'est- à - dire une fonction F telle que F'(x) = f (x) :

a) f (x) = 2 b) g (x) = 3 x^2 c) h(x) = 4 x^3 .
a) F(x) = 2x b) G(x) = x^3 c) H(x) = x^4

2°) Définition

> Soit f une fonction définie et dérivable sur I. Une fonction F définie sur I est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et que
>
> $$\boxed{F' = f}$$

Exemples :

- f(x)= 1 une primitive de f est alors F(x)= x . Vérification : F'(x)= 1
- f(x)=x une primitive de f est alors F(x)= $\frac{1}{2}x^2$. Vérification : F'(x)= 2(½ x) = x
- f(x)= $\dfrac{1}{x^2}$ pour x dans I=]0; + ∞[une primitive de f sur I est alors F(x)= $\dfrac{-1}{x}$. Vérification F'(x) = $\dfrac{1}{x^2}$

<u>3°) Ensemble des primitives d'une fonction</u>

<u>Observation</u> : si G(x) = C où C est une constante réelle, quelle est sa dérivée g(x) ? g(x) = 0.

Donc toute constante réelle C est UNE PRIMITIVE de la fonction nulle.

On en déduit le théorème suivant :

<u>Théorème 1</u>

> Soit f une fonction définie et dérivable sur I et F **<u>une</u>** primitive de f sur I.
> Les primitives de f sur I sont alors toutes les fonctions définies sur I par $x \mapsto F(x) + C$
> où C est une constante réelle.

<u>Exemples</u> : a)Donner les primitives de la fonction f(x)= $3x^2$; ce sont les fonctions F : $x \mapsto x^3 + C$ où C $\in$ R.

b) Donner l'ensemble des primitives de la fonction f(x)= $4x^3$; c'est l'ensemble des fonctions F : $x \mapsto x^4 + C$ où C $\in$ R.

<u>Théorème 2</u>

> Soit f une fonction définie et dérivable sur I.
> Parmi les primitives de f définies sur I il en existe **<u>une et une seule</u>** telle que F(x_0) = y_0.
> En particulier la fonction $x \mapsto F(x) - F(a)$ est la seule primitive de f qui s'annule en a.

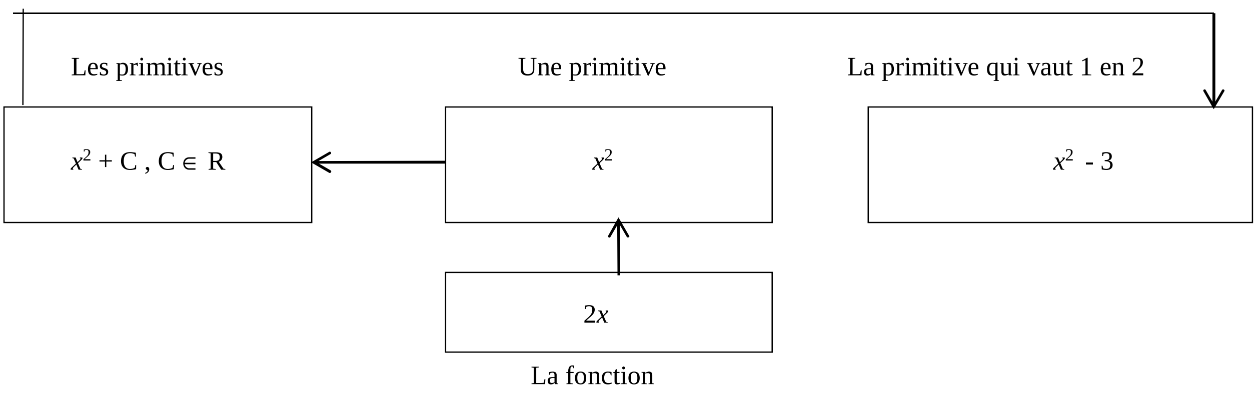
<u>Exemple</u> : Déterminer la primitive F_0 de la fonction f définie sur R par f(x)= $3x^2$ telle que $F_0(1) = 0$.

On sait que F_0 s'écrit $F_0(x) = x^3 + C$. On va donc déterminer C pour que $F_0(1) = 0$

On remplace donc x par 1 et on obtient $F_0(1) = (1)^3 + C = 0$ soit $1 + C = 0$. Ce qui donne C = - 1 .

<u>La</u> primitive cherchée est donc $F_0(x) = x^3 - 1$.

<u>Remarque</u> : On fera donc bien la différence entre
<u>une</u> primitive de f (on donne généralement la fonction la plus simple qui répond à la question)
<u>Les</u> primitives de f (c'est la fonction trouvée ci-dessus + C où C $\in$ R)
<u>La</u> primitive de f vérifiant une condition (On cherche la constante réelle C pour laquelle la condition est vérifiée)



Exercice

Soit f la fonction définie sur R par f(x) = x^2 , déterminer :

a) Une primitive de f sur R .
b) Les primitives de f sur R.
c) La primitive de f qui vaut 0 en -1 .

a) F(x) = $x^3/3$ b) ce sont les fonctions F : $x \to x^3/3 + C$ où $C \in R$ c) c'est la fonction $F_0(x) = x^3/3 + 1/3$.

4°) Savoir montrer qu'une fonction donnée F est une primitive sur I d'une fonction f

Soit f une fonction définie et dérivable sur I .
Pour démontrer qu'une fonction F donnée est une primitive de f il suffit de vérifier que F'(x) = f (x) pour tout x de I.

Exemple : Soit f (x) = $x^3 + 3x^2 - 2$.Montrer que la fonction F définie par F (x) = $\frac{1}{4} x^4 + x^3 - 2x + 3$ est une primitive de f sur R.

F'(x) = $4(\frac{1}{4} x^3) + 3x^2 - 2$ = f (x) donc F est une primitive de f sur R.

Exercice : Montrer que la fonction donnée F est une primitive de f sur I

$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ $F(x) = -\frac{1}{x-2}$ I = [3 ; 100]

5°) Primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées

a) Tableau

f	Df	F	DF
0	R	C	R
a		ax + C	
x		$\frac{1}{2} x^2 + C$	
x^2		$\frac{x^3}{3} + C$	
x^n		$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $n \in \mathbb{N}^*$	
$\frac{1}{x^2}$	R*	$-\frac{1}{x} + C$	R*
$\frac{1}{x^3}$	R*	$-\frac{1}{2x^2} + C$	R*
$\frac{1}{x^n}$	R*	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}} + C$ n entier naturel $n \geq 2$	R*
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	R^{+*}	$\sqrt{x} + C$	R^{+}
$\frac{1}{x}$	$]0 ;+ \infty[$	$\ln x + C$	$]0 ;+ \infty[$
e^x	R	$e^x + C$	R
$\cos x$		$\sin x + C$	
$\sin x$		$-\cos x + C$	
$1 + \tan^2 x$		$\tan x + C$	

b) Opérations

En s'appuyant sur les résultats concernant les opérations sur les fonctions dérivables, on établit que :

> Si F est une primitive de f sur un intervalle I et G est une primitive de g sur un intervalle I alors :
>
> - F + G est une primitive de f + g
> - aF est une primitive de   af où a est une constante réelle.

Exemples :

a) Une primitive de $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$ sur I = [1 ;10] est $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \ln x$

b) Une primitive de $f(x) = 5x^3$ sur R est $F(x) = 5(\frac{1}{4}x^4) = \dfrac{5}{4}x^4$.

c)Conséquences des formules de dérivation

Fonction	Primitive	EXEMPLES : Dans chaque cas calculer les primitives de la fonction donnée sur I.
$U'.U$	$\frac{1}{2}U^2 + C$	Soit *f* la fonction définie sur R par $f(x) = 6x^2(2x^3 + 1)$ $F(x) = \frac{1}{2}(2x^3 + 1)^2 + C$, C dans R
$U'.U^n$, $n \in N^*$	$\dfrac{U^{n+1}}{n+1} + C$	Soit *f* la fonction définie sur R par $f(x) = (2x + 1)(x^2 + x)^2$ $F(x) = \dfrac{1}{3}(x^2 + x)^3 + C$, C dans R
$\dfrac{U'}{U^2}$ $(U \neq 0 \text{ sur } I)$	$-\dfrac{1}{U} + C$ $(U \neq 0 \text{ sur } I)$	Soit *f* la fonction définie sur R par $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2}$ $F(x) = -\dfrac{1}{x^2 + 1} + C$, C dans R
$\dfrac{U'}{U^n}$ $(U \neq 0 \text{ sur } I)$ n entier et $n \geq 2$	$-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{U^{n-1}} + C$ $(U \neq 0 \text{ sur } I)$ n entier et $n \geq 2$	Soit *f* la fonction définie sur R par $f(x) = \dfrac{2x + 3}{(x^2 + 3x + 3)^3}$ $F(x) = -\dfrac{1}{2(x^2 + 3x + 3)^2} + C$, C dans R
$\dfrac{U'}{\sqrt{U}}$ (U >0 sur I)	$2\sqrt{U} + C$	Soit *f* la fonction définie sur R^+ par $f(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^3 + 1}}$ $F(x) = 2\sqrt{x^3 + 1} + C$, C dans R
$\dfrac{U'}{U}$ $U \neq 0$	$\ln \lvert U \rvert + C$	Soit *f* la fonction définie sur R par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ $F(x) = \ln(x^2 + 1) + C$, C dans R

$U'e^U$	$e^U + C$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = 3x^2 e^{x^3}$ $F(x) = e^{x^3} + C$, C dans R
$U'\cos U$	$\sin U + C$	$f(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$ $F(x) = \sin(\ln x) + C$
$U'\sin U$	$-\cos U + C$	$f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$ $F(x) = -\cos(\ln x) + C$

Exemple : Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x(x^2 + 1)$. Donner la primitive de f qui s'annule en 1.

Méthode : d'abord on essaie d'identifier la formule que l'on va utiliser, ici U'U .
Cependant si $U(x) = x^2 + 1$ alors $U'(x) = 2x$ et non x. On va donc **« faire apparaître » U'(x)** .
$f(x) = \frac{1}{2}[2x(x^2 + 1)]$ d'où $F(x) = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(x^2 + 1)^2] + C = \frac{1}{4}(x^2 + 1)^2 + C$ où C dans R. Comme $F(1) = 0$ on a $C = -1$ et $F(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 1)^2 - 1$.

$f(x) = \sin(ax+b)$ $F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$f(x) = \cos(ax+b)$ $F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

Fonction	Primitive	EXEMPLES : Dans chaque cas calculer les primitives de la fonction donnée sur I.
$U'.U$	$\frac{1}{2}U^2$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = 6x^2(2x^3 + 1)$ $F(x) = \frac{1}{2}(2x^5 + 1)^2 + C$, C dans R
$U'.U^n$, $n \in N^*$	$\frac{U^{n+1}}{n+1}$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (2x + 1)(x^2 + x)^2$ $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x)^3 + C$, C dans R
$\frac{U'}{U^2}$ ($U \neq 0$ sur I)	$-\frac{1}{U}$ ($U \neq 0$ sur I)	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$ $F(x) = -\frac{1}{x^2 + 1} + C$, C dans R
$\frac{U'}{U^n}$ ($U \neq 0$ sur I) n entier et $n \geq 2$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{U^{n-1}}$ ($U \neq 0$ sur I) n entier et $n \geq 2$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x + 3)^3}$ $F(x) = -\frac{1}{2(x^2 + 3x + 3)^2} + C$, C dans R
		$3x^2$

$\dfrac{U'}{\sqrt{U}}$ (U >0 sur I)	$2\sqrt{U}$	Soit *f* la *f*onction dé*f*inie sur R⁺ par $f(x) = \dfrac{}{\sqrt{(x^3 + 1)}}$ $F(x) = 2\sqrt{(x^3 + 1)} + C$, C dans R
$\dfrac{U'}{U}$ $U \neq 0$	ln|U|	Soit *f* la *f*onction dé*f*inie sur R⁺ par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ $F(x) = \ln(x^2 + 1) + C$, C dans R
$U'e^U$	e^U	Soit *f* la *f*onction dé*f*inie sur R par $f(x) = 2xe^{x2}$ $F(x) = e^{x2} + C$, C dans R
U'sinU	-cos U	f(x) = sin(ax+b) $F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
U'cos U	sinU	f(x)= cos(ax+b) $F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$