LA FONCTION LN

I) Définition et propriétés

1°) Définition

La fonction définie et dérivable sur] 0 ; + ∞[dont la dérivée est $\frac{1}{x}$ et qui vaut 0 en 1 est la fonction logarithme népérien notée ln on a : $\ln :]0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto \ln x$

Remarque : On définit ln aussi en disant que c'est la primitive de $\frac{1}{x}$ qui vaut 0 en 1

2°) Conséquences immédiates

- ln$x$ est défini si x est strictement positif
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (démonstration à voir et à connaître p 156)
- $\ln 1 = 0$

II Formules fondamentales

Théorème

Pour tous réels a et b strictement positifs

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

Exemples : $\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$; $\ln 2x = \ln 2 + \ln x$ (x ds]0 ; +∞[)

Conséquences

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

Exemples : $\ln \frac{1}{3} = -\ln 3$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

Exemples : $\ln \frac{3}{4} = \ln 3 - \ln 4$; $\ln x - \ln (x^2 + 1) = \ln\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$ avec $x \in \left]0 ; +\infty\right[$

$$\ln a^p = p \ln a$$

où p est un entier relatif

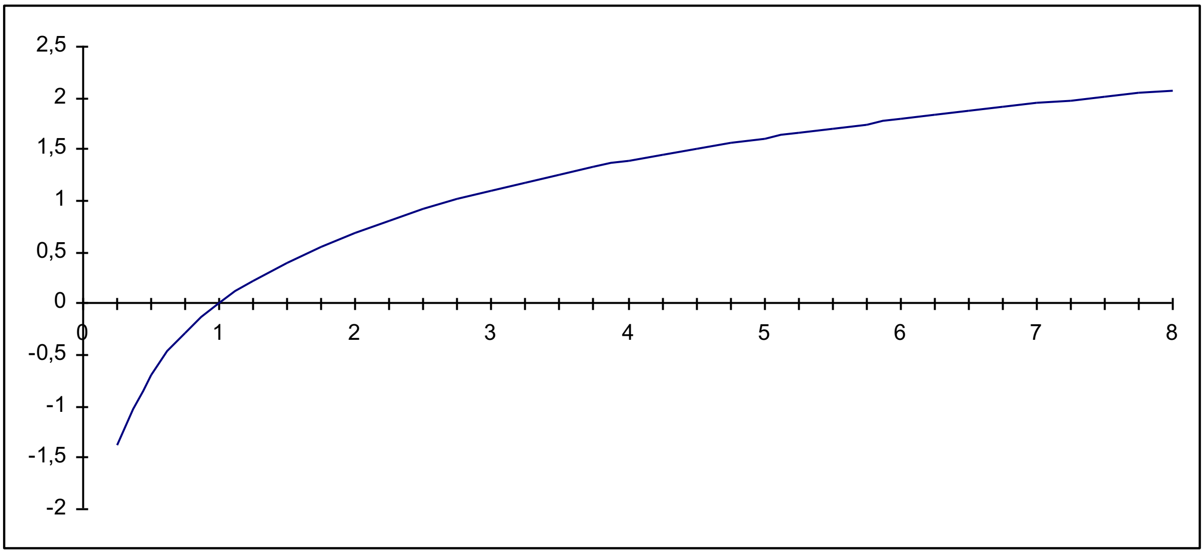
Exemples : $\ln 8 = 3\ln 2$; $\ln 27 = 3\ln 3$; $2 \ln (x + 1) = \ln(x+1)^2$ avec $x \in \left]1 ; +\infty\right[$

$$\ln \sqrt{a} = \tfrac{1}{2} \ln a$$

Exemples : $\ln \sqrt{3} = \frac{1}{2} \ln 3$; $\ln \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$; $\frac{1}{2} \ln 25 = \ln 5$

III) La courbe et l'étude des variations .

1°) La courbe



x	0.25	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8
$\ln x$	-1,39	-0,69	0	0,69	1,1	1,39	1,61	1,79	1,95	2.08

2°) Les limites

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

Interprétation graphique : L'axe des ordonnées d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

dém livre p 176

3°) Signe de la dérivée et sens de variation

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ pour tout x de] 0 ; + ∞ [donc $(\ln x)' > 0$ pour tout x de] 0 ; + ∞ [et la fonction ln est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [.

4°) Tableau de variation

x	0		+ ∞
$(\ln x)'$	‖	+	
$\ln x$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

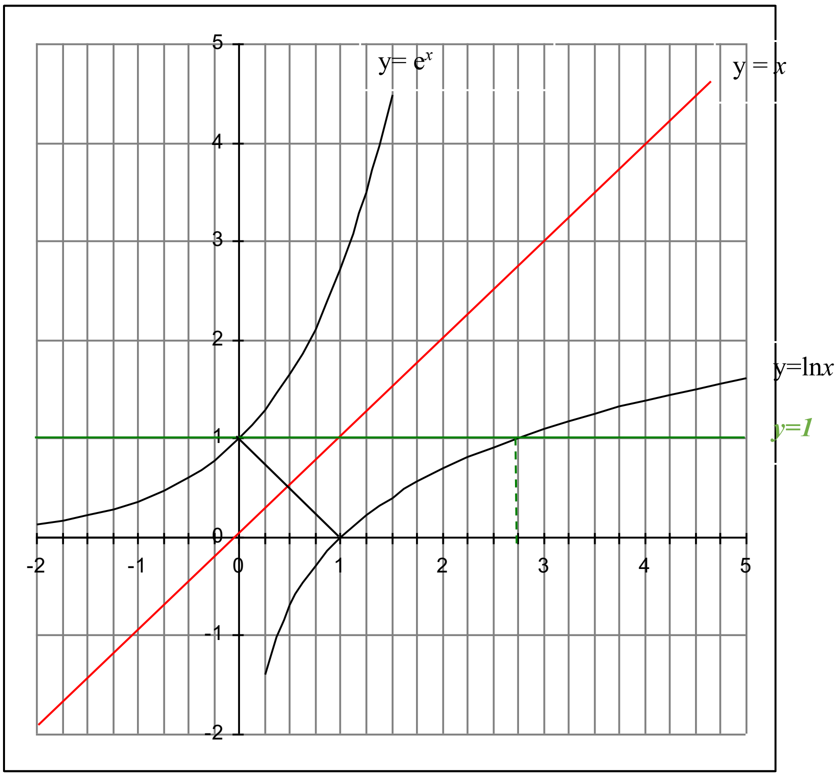
5°) Signe de ln x

x	0		1		+ ∞
$\ln x$	‖	-	0	+	

IV)Liens avec la fonction exp.

1°) Le nombre e

Les courbes Représentatives des fonctions exp Et ln sont symétriques Par rapport à la première bissectrice D'équation y=x



On veut résoudre l'équation suivante : $\ln x = 1$

Définition

La fonction ln étant continue et strictement croissante de] 0 ; + ∞[dans R
e est l'unique réel de] 0 ; + ∞ [tel que **ln e = 1** . La calculatrice donne e ≈ 2, 718 ...

On veut résoudre l'équation suivante : $e^x = 2$
La fonction exponentielle étant continue et strictement croissante de R dans] 0 ; + ∞[
Il existe **un unique réel strictement positif** qui vérifie cette équation d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires et c'est **ln 2.**

$$e^{\ln 2} = 2$$

2°) Propriété

La fonction ln est une fonction continue et strictement croissante de]0 ;+∞ [à valeurs dans R et pour tout réel y, il existe un unique réel x strictement positif tel que

$\ln x = y$ c'est le nombre $x = e^y$

La fonction ln est la fonction réciproque de la fonction exp

- **$\ln e^x = x$ pour tout x de R.**
- **$e^{\ln x} = x$ pour tout x de]0;+∞[**

Conséquence : Démonstrations p 154 et 156 des limites, de la dérivée.

Exemples : $\ln e^2 = 2$; $3 = \ln e^3$; $\ln e^{-5} = -5$

a) $\ln e^{-1} = -1$ b) $\ln\sqrt{e} = 0.5$ c) $\ln \frac{1}{\sqrt{e}} = -0.5$ d) $e^{\ln 3} = 3$ e) $e^{2\ln 2} = 4$ f) $e^{-\ln 10} = 0.1$

V) Equations . Inéquations

1°) Equations Pour tous réels a et b strictement positifs

$$\boxed{\ln a = \ln b \text{ équivaut à } a = b}$$

Exemples : Résoudre dans R les équations suivantes

1) $\ln x = \ln 2$ 2) $\ln x = 4$ 3) $\ln(3x - 2) = \ln(x - 1)$ 4) $\ln(x^2 + 1) - \ln 2 = 0$

Méthode : **Avant tout calcul** la première chose à faire est de déterminer ***l'ensemble E sur lequel notre équation a un sens sachant que*** **ln A existe si A > 0 .** Ensuite on résout en vérifiant bien que les solutions trouvées sont ou non dans l'ensemble E.

1- Résoudre l'équation $\ln x = \ln 2$ équivaut à résoudre le système $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ \ln x = \ln 2 \end{cases}$

ce qui donne $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ x = 2 \end{cases}$ 2 est bien dans $]0 ; +\infty[$ donc $S = \{2\}$

2 – Dans cette équation on remarque « qu'il n'y a pas de ln dans le terme de droite de l'équation ».
Il va falloir faire « apparaître ln » grâce à la propriété ci-dessus :
Comme $4 = \ln e^4$ on a :
Résoudre l'équation $\ln x = 4$
équivaut à résoudre le système $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ \ln x = \ln e^4 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ x = e^4 \end{cases}$

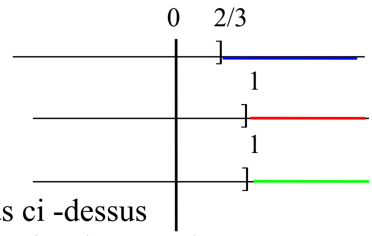
e^4 est bien dans $]0 ; +\infty[$ donc $S = \{e^4\}$.

3 - Dans cette équation il y a l'inconnue x des deux côtés donc la plus grande difficulté ici sera de déterminer l'ensemble E sur lequel l'équation a un sens :

$\ln(3x - 2)$ est défini si $3x - 2 > 0$ c'est - à - dire si $x > 2/3$ soit $x \in]2/3 ; +\infty[$

$\ln(x - 1)$ est défini si $x - 1 > 0$ c'est - à - dire si $x > 1$ soit $x \in]1 ; +\infty[$

L'ensemble E sera l'intersection de ces deux intervalles soit $E =]1 ; +\infty[$



Remarque : pour trouver cette intersection on peut s'aider des schémas ci -dessus
« L'intersection c'est l'endroit où on peut avoir en même temps les deux couleurs » .

Résoudre l'équation $\ln(3x-2) = \ln(x - 1)$ équivaut à résoudre le système $\begin{cases} x \in E \\ \ln(3x-2) = \ln(x-1) \end{cases}$

ce qui donne $\begin{cases} x \in E \\ 3x-2 = x - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \text{soit } x \in E \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Or attention $\frac{1}{2} \notin E =]1 ; +\infty[$ donc $S = \varnothing$.

Remarque : on voit grâce à cet exemple la nécessité de toujours vérifier l'appartenance à l'ensemble de définition E des valeurs trouvées .

4 - Comme $x^2 + 1 > 0$ on a $\ln(x^2 + 1)$ défini sur R .Donc résoudre l'équation $\ln(x^2 + 1) - \ln 2 = 0$ équivaut à résoudre $\ln(x^2 + 1) = \ln 2$ soit $x^2 + 1 = 2$ ce qui donne encore $x^2 = 1$; On en déduite que $S = \{-1 ; 1\}$.

2°)Inéquations Pour tous réels a et b strictement positifs

$\ln a \leq \ln b$ équivaut à $a \leq b$	$\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$	$\ln a \geq \ln b$ équivaut à $a \geq b$
	$\ln a > \ln b$ équivaut à $a > b$	

Exemples : Résoudre dans R les inéquations suivantes

1. $\ln x > \ln 3$ 2. $\ln x \leq -2$ 3. $\ln(4x - 1) > \ln(x + 4)$ 4. $\ln(x^2 + 1) \leq \ln 2$

Méthode : La méthode est la même que pour les équations sauf que la solution sera généralement un intervalle ou une réunion d'intervalles qui sera l'intersection de l'ensemble E de définition et des conditions trouvées après calculs.

1- Résoudre l'inéquation donnée équivaut à résoudre $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ x > 3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ x \in]3 ; +\infty[\end{cases}$

D'où la solution qui est l'intersection de ces deux intervalles à savoir S =] 3 ; + ∞ [

2 - Résoudre l'inéquation donnée équivaut à résoudre $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ \ln x \leq \ln e^{-2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ x \leq e^{-2} \end{cases}$ $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ x \in]-\infty ; e^{-2}] \end{cases}$

D'où la solution qui est l'intersection de ces deux intervalles à savoir S =] 0 ; e^{-2}] .

3 - L'inéquation a un sens si $4x - 1 > 0$ et $x + 4 > 0$ c'est - à -dire si $x \in]¼ ; +\infty[$ et $x \in]-4 ; +\infty[$ soit si $x \in E =]\frac{1}{4} ; +\infty[$.

Résoudre l'inéquation donnée équivaut à résoudre $\begin{cases} x \in E \\ \ln(4x - 1) > \ln(x + 4) \end{cases}$ soit $\begin{cases} x \in E \\ 4x-1 > x + 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x \in E \\ 3x > 5 \end{cases}$

soit encore $\begin{cases} x \in]¼ ; +\infty[\\ x \in]5/3 ; +\infty[\end{cases}$

D'où la solution qui est l'intersection de ces deux intervalles à savoir S =] 5/3 ; + ∞ [

4 - Résoudre l'inéquation donnée équivaut à résoudre $x^2 + 1 \leq 2$ soit $x^2 - 1 \leq 0$. D'après la règle sur le signe du trinôme on en déduit que S =] - ∞ ; -1] U [1 ; + ∞ [.

VI) Autres limites Croissances comparées p178

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} xlnx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x^n\, lnx = 0$$

Preuves :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

Méthode 1

(3) On a $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{\frac{e^{\ln(x)}}{\ln(x)}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ d'après une propriété vue au chapitre 5.

Le théorème de composition des limites donne alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\ln(x)}}{\ln(x)} = +\infty$.

D'après la règle sur la limite de l'inverse d'une fonction : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^{\ln(x)}}{\ln(x)}} = 0$.

Méthode 2

• On commence par démontrer la première limite pour $n=1$, soit $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$.

f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{2\sqrt{x}}$ soit $f'(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$.

Comme $x \geqslant 1$, $\sqrt{x} \geqslant 1$ soit $1-\sqrt{x} \leqslant 0$. De plus, $x \geqslant 1$ donc $x > 0$.

On en déduit que $f'(x) \leqslant 0$ sur $[1\,;+\infty[$, donc f est décroissante sur $[1\,;+\infty[$. De plus, $f(1) = \ln(1) - 2\sqrt{1} = -2$.

Donc pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $f(x) \leqslant -2$, d'où $f(x) < 0$.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	0 $-$	
$f(x)$	-2 $\searrow$	

On en déduit que $\ln(x) < 2\sqrt{x}$ et comme $0 \leqslant \ln(x)$ pour tout x de $[1\,;+\infty[$, on a :

$0 \leqslant \ln(x) < 2\sqrt{x}$ pour tout x de $[1\,;+\infty[$.

En divisant chacun des membres de cette inégalité par x, on obtient :

$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$ pour tout x de $[1\,;+\infty[$. De plus, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$,

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

(4) Pour tout $x > 0$, $x\ln x = -x\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ et $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Or $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ donc par le théorème de la limite d'une composée : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$. Soit $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^n} = 0$

• Pour tout réel x strictement positif :

$x^n\ln(x) = -x^n\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^n}}$, donc $x^n\ln(x) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^n}$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X^n} = 0$ donc en utilisant la règle de la limite d'une fonction composée, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^n\ln(x) = 0$.

VII) Dérivées

1°) Théorème

Soit U une fonction dérivable et strictement positive sur I. La fonction f définie sur I par f(x)= ln U(x) est dérivable sur I et

$$\boxed{f' = \frac{U'}{U}}$$

2°) Des exemples à retenir

a) Si f(x)= ln (x -1) avec $x \in]1 ; +\infty[$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

b) si f(x) = ln (x - a) avec $x \in]a ; +\infty[$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x - a}$ (a > 0)

de même si f(x)= ln (x + b) avec $x \in]-b ; +\infty[$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x + b}$ (b > 0)

c) Si f(x)= ln 2x avec $x \in]0 ; +\infty[$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

d'une façon générale si avec m > 0 f(x)= ln mx où $x \in]0 ; +\infty[$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

d) Si f(x) = ln (2x - 1) avec $x \in]\frac{1}{2} ; +\infty[$ alors $f'(x) = \dfrac{2}{2x - 1}$

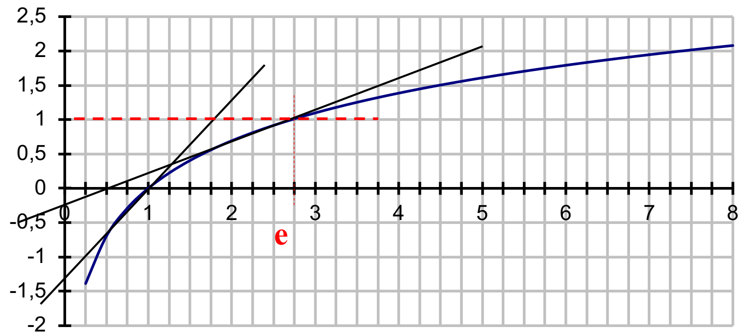
de même d'une façon générale si avec m > 0 on f(x) = ln (mx + p) avec $x \in]-p/m ; +\infty[$

alors $f'(x) = \dfrac{m}{mx + p}$

VIII) Equations de deux tangentes importantes à la courbe de la fonction ln

a)Tangente au point A(1 ; 0)

$y = x - 1$



b)Tangente au point B(e ;1)

$y = \dfrac{1}{e} x$

c)Approximation affine

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Au voisinage de 0 : $\ln(x + 1) \approx x$

IX)Complément

La fonction logarithme décimal

Définition

La fonction Log ou logarithme décimal est la fonction définie par :

$$\mathrm{Log} :]0\ ; +\infty[\ \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{\ln x}{\ln 10}$$