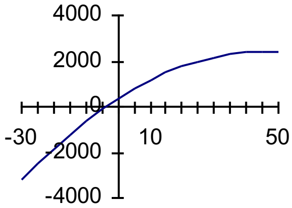
LIMITES DE FONCTIONS

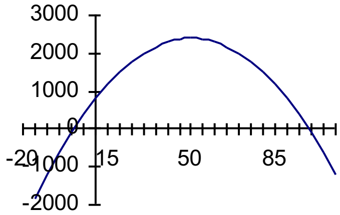
I) Limites infinies en l'infini

1°) Comportement des polynômes en l'infini

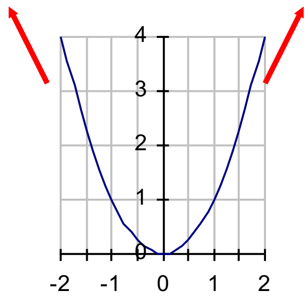
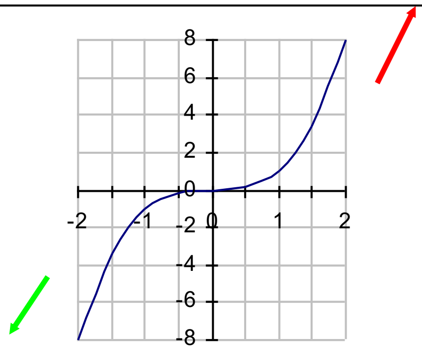
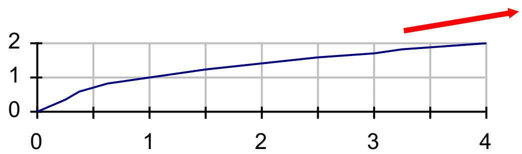
Ce qui se passe en $+\infty$ c'est ce qui se passe pour les très grandes valeurs de x .Comment se « représenter » $+\infty$: avec la calculatrice on pourra remplacer x par 1000 soit 10^3 (ou plus) pour avoir une idée de ce qui se passe en $+\infty$. De même on prendra - 1000 pour $-\infty$ .Sur un graphique on peut symboliser l'infini par le point de l'axe (Ox) qui est le plus à droite en gardant cependant à l'esprit que l'échelle a une part importante dans la lecture du résultat . Il faut donc rester vigilant !

Exemple :





a)Fonctions de référence

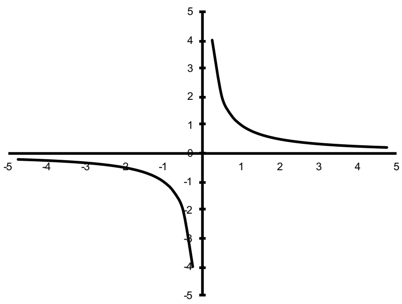
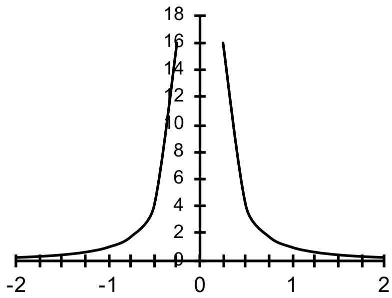
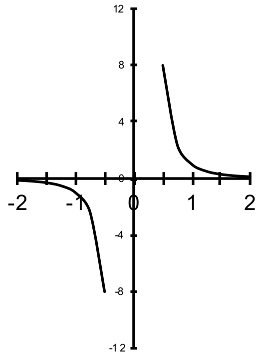
Fonction	Courbe	Limites
CARREE		$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
CUBE		$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
RACINE CARREE		$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ **Remarque** : La fonction racine carrée étant définie sur$[0\ ;+\infty[$ pas de limite en $-\infty$

2°) Généralisation

$\lim_{x\to+\infty} x^{\text{PAIRE}} = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^{\text{PAIRE}} = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} x^{\text{IMPAIRE}} = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^{\text{IMPAIRE}} = -\infty$

II) Limites finies en l'infini. Asymptotes horizontales(Activité)

1°) Fonctions de référence

		
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^{(+)}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^{(-)}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0^{(+)}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0^{(+)}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0^{(+)}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0^{(-)}$

Les courbes de ces fonctions admettent l'axe des abscisses d'équation y = 0 comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

2°) Généralisation

Soit a un réel donné

Limites

Si par exemple

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$$

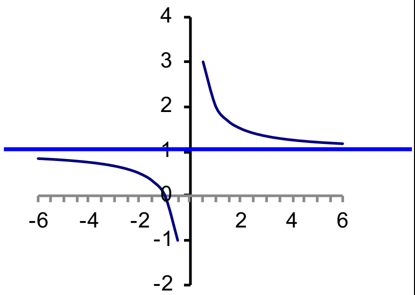
Ou /et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$

Interprétation graphique

La droite d'équation

y = a est asymptote horizontale

à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (ou/et $-\infty$)

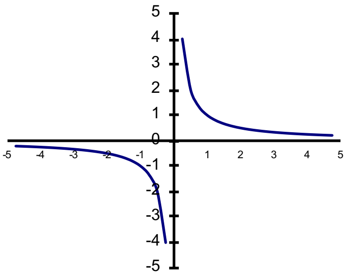
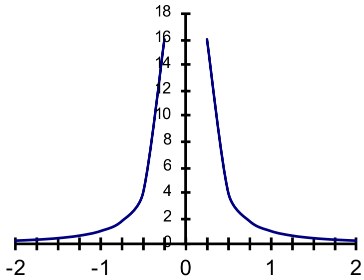
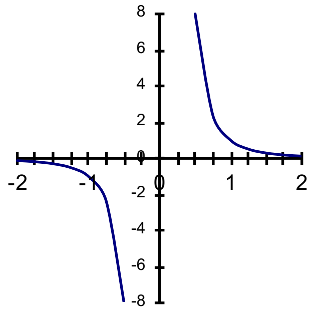
Exemple $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$		$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathbf{1}^{(+)}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \mathbf{1}^{(-)}$	**La droite d'équation** **y = 1** **est** **asymptote horizontale** **à la courbe de f** **au voisinage de** $+\infty$ et $-\infty$

III) Limites en un point a . Asymptotes verticales(activité)

1°)Cas où a est un élément de l'ensemble de définition (cas revu en détail au prochain chapitre)

> Si f est une fonction usuelle, polynôme ou rationnelle avec a $\in D_f$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

2°)Cas où a n'apartient pas à D_f

		
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$

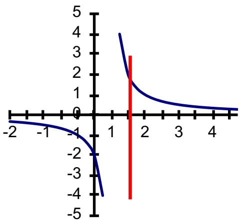
> **Les courbes de ces fonctions admettent l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale**

Généralisation Soit b un réel donné

Limites	Interprétation graphique
Si par exemple $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x>b}} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) ou / et $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} f(x) = -\infty$ (ou $+\infty$)	**La droite d'équation** **$x = b$** **est** **asymptote verticale** **à la courbe de f**

EXEMPLES : 1°) $f(x)=\frac{1}{x-1}$

Interprétation graphique



La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f

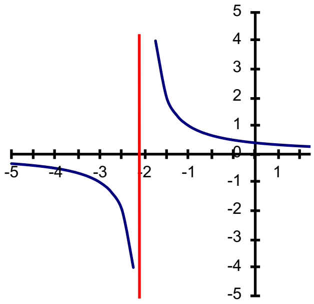
x		1	
$x - 1$	-	0	+

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x-1) = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{x-1} = +\infty$ $\left(\frac{1}{0^+}\right)$

comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x-1) = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{1}{x-1} = -\infty$ $\left(\frac{1}{0^-}\right)$

2°) $f(x)=\frac{1}{x+2}$

Interprétation graphique



La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe de f

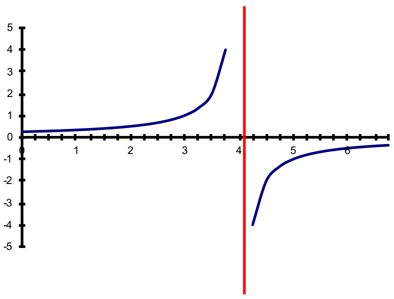
x		-2	
$x + 2$	-	0	+

On a $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}(x+2) = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\frac{1}{x+2} = +\infty$ $\left(\frac{1}{0^+}\right)$

comme $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}(x+2) = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\frac{1}{x+2} = -\infty$ $\left(\frac{1}{0^-}\right)$

3°) $f(x)=\frac{1}{4-x}$

Interprétation graphique



La droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale à la courbe de f

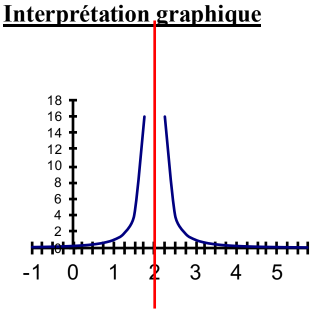
x		4	
$4 - x$	+	0	-

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}}(4-x) = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}}\frac{1}{4-x} = -\infty$ $\left(\frac{1}{0^-}\right)$

comme $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}}(4-x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}}\frac{1}{4-x} = +\infty$ $\left(\frac{1}{0+}\right)$

4°) $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$

Interprétation graphique



La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticaleà la courbe de f

x		2	
$(x-2)^2$	+	0	+

On a $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2 = 0^+$donc $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ $\left(\frac{1}{0^+}\right)$

IV) Opérations et limites

1°) Somme

lim f	lim g	lim f + g
ℓ	ℓ'	ℓ+ ℓ'
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	**INDETERMINEE**

2°) Produit

lim f	lim g	lim f × g
l	l'	l×l'
l>0	$+\infty$	$+\infty$
l>0	$-\infty$	$-\infty$
l<0	$+\infty$	$-\infty$
l<0	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0	$+\infty$	**INDETERMINEE**
0	$-\infty$	**INDETERMINEE**

TOUTES LES INDETERMINEES

$$\infty - \infty \qquad \infty \times 0 \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

REMARQUE IMPORTANTE :

LORSQUE DANS UN EXERCICE IL Y A UNE INDETERMINEE L'OBJECTIF EST DE TRANSFORMER L'ECRITURE DE LA FONCTION OU D'UTILISER DES THEOREMES SUR LES LIMITES POUR LEVER L'INDETERMINEE ET CALCULER LA LIMITE !

➔ **Exercices à prise d'initiative**

V) Autres calculs de limites

ℓ et ℓ' sont des réels et a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Soit f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$. Si f≤ g (ou f<g ou f≥g ou f>g) alors $\ell \le \ell'$ ($\ell \ge \ell'$)

Remarque : une inégalité stricte devient large en passant à la limite

1°) Limites et ordre

a) CAS DES LIMITES FINIES → on utilise le théorème des gendarmes

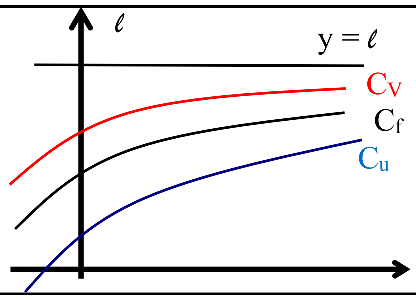
Conséquence : le théorème des gendarmes

ℓ est un nombre réel.

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \ell$ et si $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \ell$

avec u ≤ f ≤ v au voisinage de a

alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$



Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\cos x + 2}{x}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$

Pour tout réel strictement positif (limite en $+\infty$) $\frac{1}{x} \le f(x) \le \frac{3}{x}$ puisque pour tout réel x, $-1 \le \cos x \le 1$.

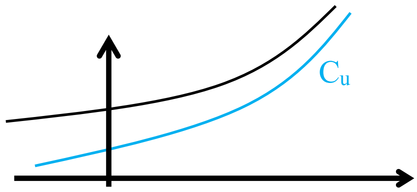
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ on en déduit d'après le th des gendarmes que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) CAS DES LIMITES INFINIES→ on utilise le Théorème de comparaison des limites

Théorème

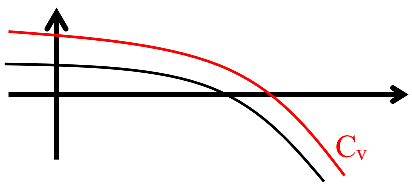
- Si $\lim\limits_{x\to a} \mathbf{u(x)} = +\infty$ avec **u** ≤ f au voisinage de $+\infty$

alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$



- Si $\lim\limits_{x\to a} \mathbf{v(x)} = -\infty$ avec f ≤ **v** au voisinage de $+\infty$

alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$



Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 1 + \cos x$. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Conseil : D'abord on cherche au brouillon les limites en l'infini en « oubliant » $\cos x$ puis on encadre $f(x)$:

Pour tout réel x, $-1 \le \cos x \le 1$

On a donc $x^3 + 1 - 1 \le x^3 + 1 + \cos x \le x^3 + 1 + 1$ soit

$$x^3 \le f(x) \le x^3 + 2$$

Limite en $+\infty$: On veut montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ alors on choisit le polynôme qui MINORE $f(x)$

En effet comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ alors d'après le théorème de comparaison des limites et par minoration

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Limite en $-\infty$: Attention cette fois-ci, comme on veut montrer que $f(x)$ tend vers $-\infty$ on doit choisir le polynôme qui MAJORE $f(x)$

En effet comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 + 2 = -\infty$

alors d'après le théorème de comparaison des limites et par majoration $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2°) Limites et composée

Théorème

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{X\to b} v(X) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} v \circ u(x) = c$

a,b,c représentent trois réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : soit f la fonction définie par $f(x)= \sqrt{\dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - 1/x^2}{1 + 1/x^2} = 2$$

$\lim\limits_{X\to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{2}$

FICHE PRATIQUE N°1 SUR LES LIMITES

Limites de fonctions polynômes en l'infini

POUR DETERMINER
La limite d'une fonction polynôme en **l'infini** ***DANS LE CAS D'UNE INDETERMINATION***
ON FACTORISE par la plus grande puissance de *x*

Exemple : Ici on cherche la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$.
Il est clair que l'on a une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. Pour lever l'indétermination :

On met en facteur
la puissance de *x* la plus élevée ici x^2

$$f(x) = x^2 \left[\frac{-3x^2 + 4x + 1}{x^2}\right]$$

On écrit f(*x*) au numérateur

On met au dénominateur la puissance de *x* la plus élevée ici x^2

ce qui donne

$$f(x) = x^2 \left(\frac{-3x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)$$

soit après simplifications

$$f(x) = x^2 \left(-3 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

Ensuite on calcule la limite :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

et

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = -3$ par somme

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

d'où par produit

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

De même on montre que $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

Remarque : **pour vérifier AU BROUILLON** on utilise le fait que la limite en l'infini d'un polynôme est en fait la limite en l'infini de son terme de plus haut degré !
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -3x^2 = -\infty$

FICHE PRATIQUE N°2 SUR LES LIMITES

Limites de fonctions rationnelles en l'infini

Pour chercher la limite d'une fonction rationnelle en **l'infini**
DANS LE CAS D'UNE INDETERMINATION

on factorise :

1 .Au numérateur par la plus grande puissance de *x* et

2 . Au dénominateur par la plus grande puissance de *x* et

3. On simplifie puis on calcule la limite de l'écriture obtenue .

Exemple:

Soit f la fonction définie sur R par $f(x)=\dfrac{-2x+5}{x^2+3}$. On cherche sa limite en $+\infty$. Il y a indétermination, car on a $-\infty$ au numérateur et $+\infty$ au dénominateur :

$$f(x) = \frac{x\left(-2+\dfrac{5}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)} = \frac{\left(-2+\dfrac{5}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}$$

Ensuite on calcule la limite : comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ alors on a

$$\lim_{x\to+\infty} -2+\frac{5}{x} = -2$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x^2}\right) = 1 \quad \text{donc } \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{3}{x^2}\right) = +\infty$$

d'où par quotient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

De même on montre que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$

Remarque : **l'interprétation graphique de cette limite** est que la courbe de f admet l'axe des abscisses d'équation y=0 comme asymptote horizontale au voisinage de l'infini.

Remarque : Comme pour les polynômes AU BROUILLON la limite de la fraction sera celle du quotient du terme de degré le plus élevé du numérateur et du terme de degré le plus élevé du dénominateur (après avoir simplifié autant que nécessaire)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{x} = 0$$

Exercice 1: Déterminer la limite de f en $+\infty$ et donner une interprétation graphique de cette limite.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{2x^2 - 3x}$$

Corrigé non détaillé : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

l'interprétation graphique de cette limite est que la courbe de f admet la droite d'équation $y=\frac{1}{2}$ comme asymptote horizontale

Exercice 2 : Déterminer la limite de f en $-\infty$

$$f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 1}{2x^2 - 3x}$$

Corrigé non détaillé : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

FICHE PRATIQUE N° 3 SUR LES LIMITES

Limite d'une fonction rationnelle en un point qui ANNULE Le DENOMINATEUR

a-Exemple (voir activité p 8)

Soit f la fonction définie sur]1, +∞ [par $f(x)= \dfrac{3x^2 + 1}{x - 1}$.

On cherche le signe de x - 1 sur]1 ; +∞ [

x	1	$+\infty$
$x-1$	0	+

Donc

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} 3x^2 + 1 = 4 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x - 1 = 0^+ \end{array}\right\} \text{donc par quotient } \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty .$$

Remarque : graphiquement la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe.

b-Limite d'une fonction rationnelle en un point qui ANNULE Le DENOMINATEUR ET LE NUMERATEUR

Exemple

Soit f la fonction définie sur E par $f(x)= \dfrac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2} = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(3x+2)} = \dfrac{2x+1}{3x+2}$

Dans ce cas on simplifie
Par le facteur commun
Du numérateur et du dénominateur

Donc

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3/5.$