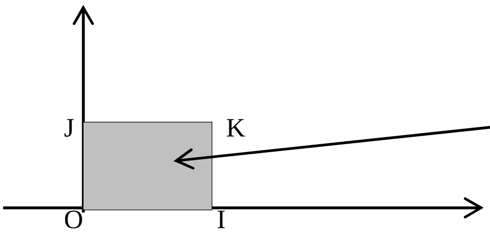
INTEGRALES

IMPORTANT : l' UNITE D'AIRE

Soit (O ; i ; j) repère orthogonal du plan . OI = i et OJ = j ;



L'aire du rectangle OIKJ est 1 unité d'aire, on a donc :

1 u.a. = OI x OJ = ||i||x||j||

Exemples :

- Si || i || = || j || = 1 cm alors l'unité d'aire est 1 cm^2
- Si || i || = || j || = 2 cm alors l'unité d'aire est 4cm^2
- Si || i || =2 et || j || = 1 cm alors l'unité d'aire est 2 cm^2

I) Intégration. Interprétation en terme d'aire

1°) Définition

Soit f une fonction

CONTINUE ET POSITIVE

sur un intervalle [a ; b]

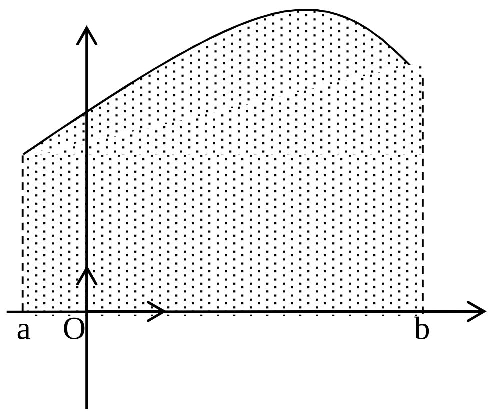
et C sa courbe représentative dans le repère (O ; i , j).

Soit (E) le domaine du plan délimité par l'axe (Ox),

la courbe C et les droites d'équations x = a et x = b

(On peut écrire aussi que M (x ; y) dans (E) ssi

$a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$)



L'aire A de la partie (E) , est notée $\int_a^b f(x)dx$ et s'exprime en u.a (unité d'aire)

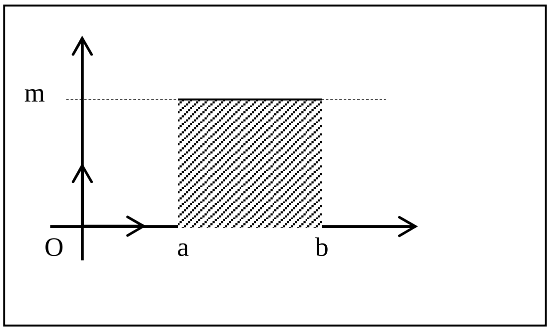
Remarques : 1) On lit « intégrale de a à b de f de x dx » . On dit aussi que x est une variable muette car

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(t)\,dt$$

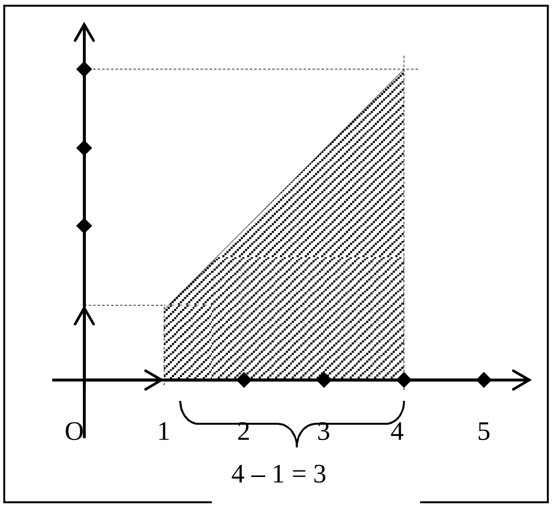
2) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

4) Pour $m > 0$ $\displaystyle\int_a^b m\,dx = m(b - a)$ u.a

(aire du rectangle grisé)



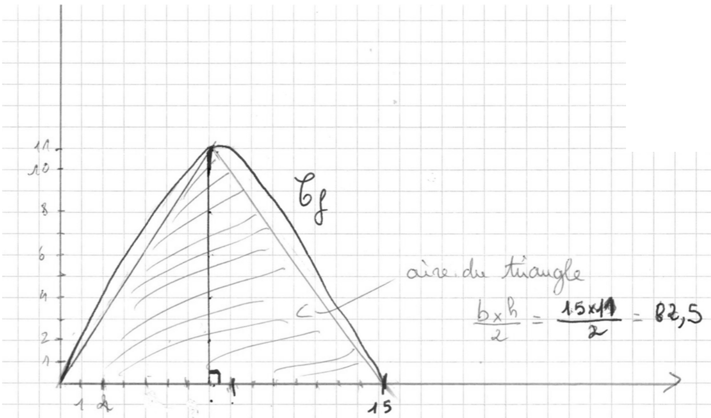
5) $$A = \int_1^4 x\,dx = \frac{3(4+1)}{2} = 7.5 \text{ u.a}$$



Si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ alors $A = 7.5\ \text{cm}^2$

Rappel : aire d'un trapèze $\dfrac{h \times (B + b)}{2}$

6)



Donc le dessin montre bien que

$$\int_0^{15} f(x)\,dx \geq 82.5 \text{ u.a}$$

2°) Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] avec **$a < b$** .On appelle **valeur moyenne** de f sur [a, b] le nombre réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

3°) Intégrale et primitive

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément quelconque de I.

La fonction $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

REMARQUE IMPORTANTE : LA DERIVEE DE LA FONCTION $\int_a^x f(t)dt$ est f(x)

Preuve : p190

Exemple 1 : $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

Exemple 2 : Etude d'une fonction définie par une intégrale

Etudier les variations de la fonction F définie sur I = [0,5 ; + ∞ [par F(x) = $\int_1^x \ln x\,dx$ en déduire le signe de F sur I.

Corrigé : F' (x) = $\ln x$ on en déduit le tableau de variation de F sur I :

x	0.5		1		$+\infty$
F'(x)		-	0	+	
F(x)	↘		0	↗	

D'après le tableau de variation, 0 étant le minimum de F sur I, on a donc F(x) ≥ 0 pour tout réel x de l'intervalle I.

Intégrale et primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a et b de I , on a :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [\,F(x)\,]_a^b$$

où F est une primitive quelconque de f sur I.

Preuve : p 190

Exemples :

1) $\int_1^2 (2x+1)\,dx = [\,x^2 + x\,]_1^2 = (4+2) - (1+1) = 4.$

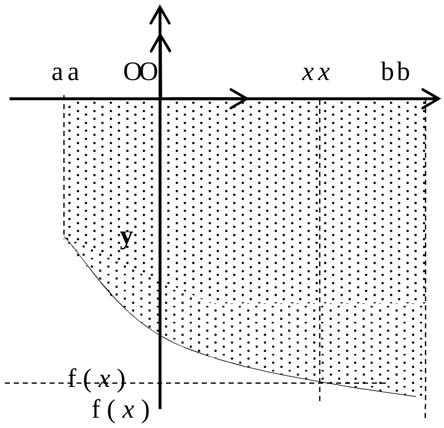
2) $\int_0^1 e^{-x}\,dx = [\,-e^{-x}\,]_0^1 = -e^{-1} - (-e^0) = 1 - \frac{1}{e}$

3) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = (\ln e)^2/2 - (\ln 1)^2/2 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

II) Intégrale d'une fonction de signe quelconque

1°) Cas d'une fonction négative

Soit f une fonction continue et **négative** sur un intervalle [a , b] .Si A est l'aire du domaine (E) du plan délimité par l'axe (Ox), la courbe C et les droites d'équations x = a et x = b c'est – à – dire l'ensemble des points M (x ; y) tels que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq 0$ est



$$A = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{u.a.}$$

Et

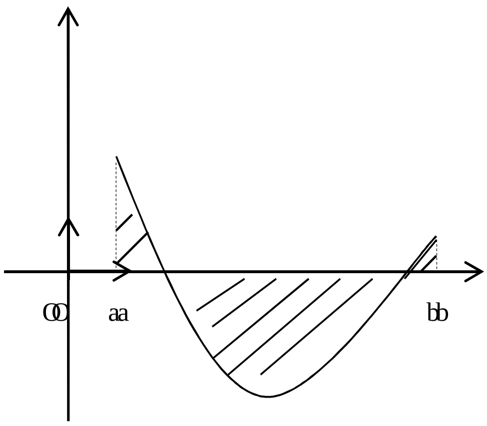
$$\int_a^b f(x)\,dx = -A$$

2°) Cas d'une fonction changeant de signe

Soit f une fonction **continue qui change de signe** sur un intervalle [a , b] et C sa représentation graphique.

Si A_1 est l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe (Ox), la partie de la courbe C située au – dessus de l'axe (Ox) et les droites d'équations x = a et x = b c'est – à – dire l'ensemble des points M (x ; y) tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ et si A_2 est l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe (Ox), la partie de la courbe C située en – dessous de l'axe (Ox) et les droites d'équations x = a et x = b c'est – à – dire l'ensemble des points M (x ; y) tels que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq 0$

On pose alors



$$A = A_1 + A_2 = \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \text{u.a}$$

Et

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

Remarque : On peut alors étendre la notion de valeur moyenne à une fonction f seulement continue et de signe quelconque.

Exemples de calculs d'aires

Exemple1 :

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et sa courbe représentative dans le repère ci-contre .Unités : 1 cm en abscisses ; 2 cm en ordonnées

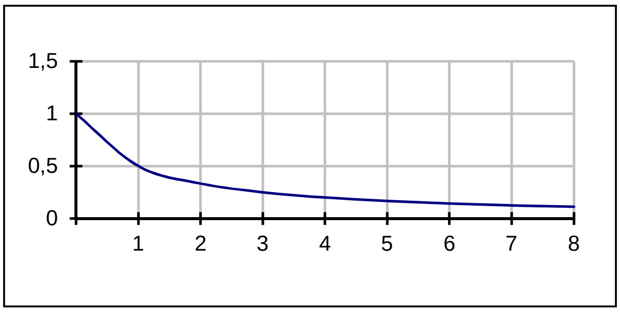
1°) Hachurer la partie E des points M(x ; y) tels que

$0 \le x \le 2$

$0 \le y \le f(x)$

2°) Calculer la valeur exacte de l'aire A de E en U.a.

3°) En déduire l'aire A de E en cm^2 .



1°) 2°) $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ U.a

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x+1}\,dx = \Big[\ln(x+1)\Big]_0^2 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$ U.a

3°) A = ln 3 x 2 cm^2 = 2 ln 3 cm^2

Exemple 2:

Soit $f(x) = -\dfrac{2x}{x^2+1}$ et sa courbe représentative dans le repère ci-contre .Unités : 2 cm en abscisses ; 2 cm en ordonnées

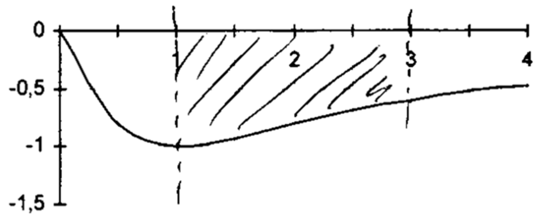
1°) Hachurer la partie E des points M(x ; y) tels que

$1 \le x \le 3$

et $f(x) \le y \le 0$

2°) Calculer la valeur exacte de l'aire de A en U.a.

3°) En déduire l'aire de A en cm^2 .



1°) 2°) $\mathcal{A} = -\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$ U.a

$\mathcal{A} = -\displaystyle\int_1^3 -\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int_1^3 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \Big[\ln(x^2+1)\Big]_1^3$ U.a

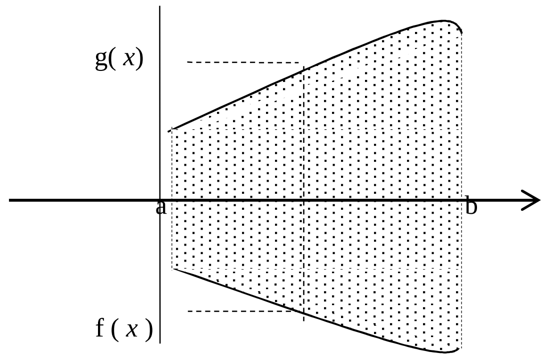
$\mathcal{A} = \ln 10 - \ln 2 = \ln \dfrac{10}{2} = \ln 5$ U.a

3°) $\mathcal{A} = \ln 5 \times 4\ \text{cm}^2 = 4 \ln 5\ \text{cm}^2$.

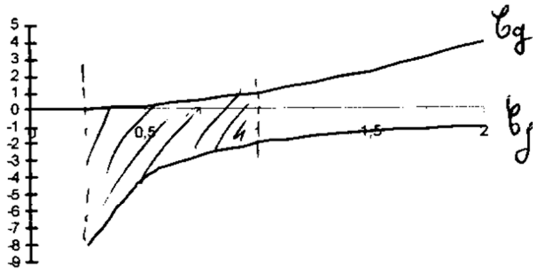
Aire de la partie du plan délimitée par deux courbes représentatives

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a , b] , telles que pour tout x de [a , b], $f(x) \leq g(x)$.
L'aire A de la partie du plan , ensemble des points M (x ; y) tels que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$ est

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \text{ u.a.}$$



Exemple :
Soit $f(x) = -\dfrac{2}{x}$ et sa courbe représentative C_f dans le repère ci-contre .
Et soit $g(x) = x^2$ et sa courbe représentative C_g dans le même repère.
Unités : 0.5 cm en abscisses ; 4 cm en ordonnées
1°) Hachurer la partie E des points M(x ; y) tels que
$\frac{1}{4} \leq x \leq 1$
et $f(x) \leq y \leq g(x)$
2°) Calculer la valeur exacte de l'aire de A en U.a.
3°) En déduire l'aire de A en cm^2 .



1°) 2°) $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{1} [g(x) - f(x)]\,dx$ U.a

Rq : car $g > f$ sur $[\frac{1}{4} ; 1]$ puisque C_g au-dessus de C_f sur cet intervalle.

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{1} \left[x^2 - \left(-\frac{2}{x}\right)\right] dx = \int_{\frac{1}{4}}^{1} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) dx$ U.a

$\mathcal{A} = \left[\dfrac{x^3}{3} + 2\ln x\right]_{\frac{1}{4}}^{1} = \left(\dfrac{1}{3} + 2\ln 1\right) - \left(\dfrac{1}{4^3} \times \dfrac{1}{3} + 2\ln\dfrac{1}{4}\right)$ U.a

$\mathcal{A} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3 \times 64} + 4\ln 2 = \dfrac{63}{192} + 4\ln 2$ U.a

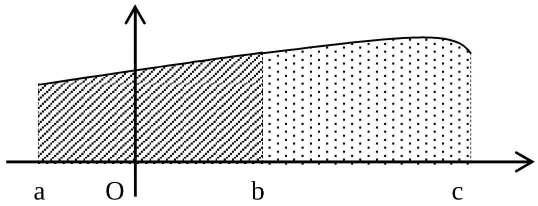
3°) $\mathcal{A} = \left(\dfrac{63}{192} + 4\ln 2\right) \times 2 \text{ cm}^2 = \left(\dfrac{21}{32} + 8\ln 2\right) \text{cm}^2.$

III) Propriétés de l'intégrale

1°) Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c des éléments de I.

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

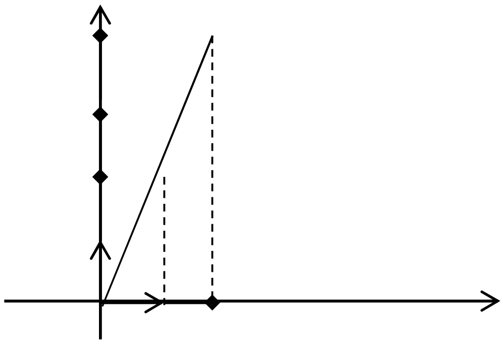


Exemple :

$$\int_0^1 2x\,dx = \left[\ x^2\ \right]_0^1 = 1$$

$$\int_1^2 2x\,dx = \left[\ x^2\ \right]_1^2 = 3$$

$$\int_0^2 2x\,dx = \left[\ x^2\ \right]_0^2 = 4 = 1 + 3\ .$$



2°)Linéarité

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a et b deux éléments de I.

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [\, f(x) + g(x)\,]\,dx$$

Pour tout nombre réel λ ,

$$\int_a^b \lambda\, f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

Exemples

$\int_0^{\pi} 2\cos x + 3\,x\ \ dx\ = 2\int_0^{\pi} \cos x\ \ dx + 3\int_0^{\pi} x\ dx = \frac{3}{2}\,\pi^{\,2}.$

3°)Antisymétrie

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

4°) Positivité

Soit f une fonction dérivable et **positive** sur un intervalle I et a et b deux éléments de I. Si **$a \leq b$** alors	$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

Signe d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I.

	Si a < b	Si a > b
Si f $\geq$ 0 sur I f POSITIVE SUR I	$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$	$\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$
Si f $\leq$ 0 sur I f NEGATIVE SUR I	$\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$	$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

Intégration d'une inégalité

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et a et b deux éléments de I.

Si **$a \leq b$** et si pour tout réel x de [a ; b] **$f(x) \leq g(x)$** alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

ROC : ex 87 p 206

Exemple :

Grâce à ce théorème on peut encadrer la valeur d'une intégrale que l'on ne sait pas calculer.

On sait que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est pour tout x de [0 ; 1] telle que $-\frac{1}{2}x + 1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{2}x^2 + 1$

On en déduit alors d'après le théorème que $\int_0^1 (-\frac{1}{2}x + 1)\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 (-\frac{1}{2}x^2 + 1)\,dx$

Soit $\left[-\frac{1}{4}x^4 + x\right]_0^1 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \left[-\frac{1}{6}x^2 + x\right]_0^1$ soit finalement $\frac{3}{4} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{5}{6}$

5°)Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I=[a ; b]

S'il existe des réels m et M tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x de I alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$