EXAMEN BLANC DE MATHEMATIQUES 2023
RATTRAPAGE

EXERCICE 1 (2 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte 0, 5 point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1-

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

D'après ce tableau de variation :
a. f ' est positive sur R
b. f ' est négative sur R
c. f ' est négative sur] 5 ; +∞[
d. f ' est négative sur $]-\infty; 5]$

2- On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur [-2 ; 5]

x	-2		-1		3		5
f(x)	0,01	↘	-0,05	↗	1	↘	-6

L'équation f(x) = 0 admet dans l'intervalle $[-2; 5]$:

a. exactement 1 solution
b. exactement 2 solutions
c. exactement 3 solutions
d. pas de solutions

3- On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\frac{3n^2-2}{n} \leq u_n \leq \frac{3n^2+5}{n}$$

On peut affirmer que la suite (u_n) :

a) converge vers 3

b) diverge vers +∞

c) converge vers 0

d) On n'a pas assez d'informations pour se prononcer sur la convergence de (u_n).

4- Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = e^{ax+1}$ où a est un réel .
On peut alors affirmer que $f'(x) =$

a) e^{ax+1}

b) ae^{ax+1}

c) axe^{ax+1}

d) (ax +1)e^{ax+1}

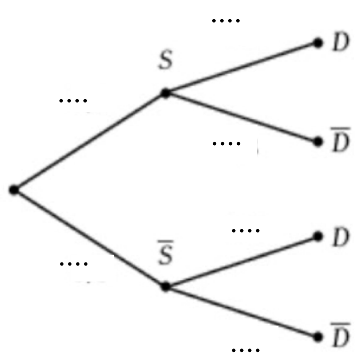
EXERCICE 2 (5 points)

Les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Partie A

Farah part sur la côte un week-end. Durant son séjour, il lui est possible de partir faire une excursion avec un guide sur un bateau.
La probabilité qu'elle choisisse d'y participer le samedi est de $0{,}4$.
• Si elle n'est pas partie faire l'excursion le samedi, la probabilité qu'elle le fasse le dimanche est de $0{,}6$.
• Si elle a participé à l'excursion le samedi, la probabilité qu'elle le fasse le dimanche est de $0{,}2$. On considère les événements suivants :
• S : « Farah part en excursion le samedi »
• D : « Farah part en excursion le dimanche »

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant représentant la situation :



2. Déterminer la probabilité que Farah parte deux jours de suite en excursion.
3. Déterminer $P(D)$.
4. On suppose que Farah n'est pas partie en excursion le dimanche.
Déterminer la probabilité qu'elle soit partie en excursion le samedi .

Partie B

Le guide touristique dispose de dix places sur son bateau. Il a constaté que régulièrement, une personne ayant acheté un billet ne se présente pas pour prendre le bateau. On suppose que le comportement de chaque touriste est indépendant les uns des autres, et que chacun a une probabilité de $0{,}95$ de se présenter pour l'excursion.
On note X le nombre de touristes qui se présentent pour prendre le bateau.

1.Donner la loi suivie par X et en donner ses paramètres.
2.Déterminer la probabilité qu'exactement 8 touristes se présentent à l'excursion.
3.Déterminer la probabilité pour qu'au moins 8 touristes se présentent à l'excursion.

EXERCICE 3 (5 points)

La médiathèque d'une petite ville rurale a ouvert ses portes le 2 janvier 2020 et a enregistré 120 inscriptions cette année – là. Comme c'est la seule médiathèque dans un rayon de 50 km, des habitants de villages environnants peuvent aussi s'y inscrire. Les responsables estiment que chaque année, il y a 53 nouveaux inscrits mais que 20% des adhérents ne renouvelleront pas leur adhésion.

Les responsables souhaitent étudier l'évolution du nombre d'adhérents. Pour cela ils modélisent le nombre d'inscrits à la médiathèque chaque année par une suite (u_n), où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre d'adhérents à la médiathèque l'année 2020 + n .

Ainsi $u_0 = 120$.

1. Déterminer u_1 c'est-à-dire le nombre d'inscrits en 2021.
2. Justifier que la suite (u_n) vérifie, pour tout entier naturel n, la relation suivante :
$$u_{n+1} = 0{,}8u_n + 53$$
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 265$$
4. La suite (u_n) est-elle convergente? Justifier votre réponse.
5. Pour tout entier naturel n, on pose :
$$v_n = u_n - 265$$
6. **a.** Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera le premier terme v_0 et la raison.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   c. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n = -145 \times 0{,}8^n + 265$
7. Déterminer la limite de la suite (u_n) puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
8. La ville avait prévu initialement un aménagement de la médiathèque pour un nombre maximum de 250 adhérents. Afin de mieux adapter les locaux de la médiathèque à la fréquentation future, le responsable de la ville pense qu'il devra prévoir des transformations dès que ce seuil sera dépassé. Il souhaite connaître l'année à partir de laquelle un réaménagement sera nécessaire. Pour résoudre ce problème on décide d'utiliser le programme écrit en Python ci-dessous.

Dans ce programme, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, et la variable u calcule le nombre d'adhérents de la médiathèque par année.

a. Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

```
def v( ):
    n=0
    u= 120
    while ......... :
        n = .........
        u = .........
    return .....
```

b. Quelle est la valeur de n obtenue à la fin de l'exécution du programme.

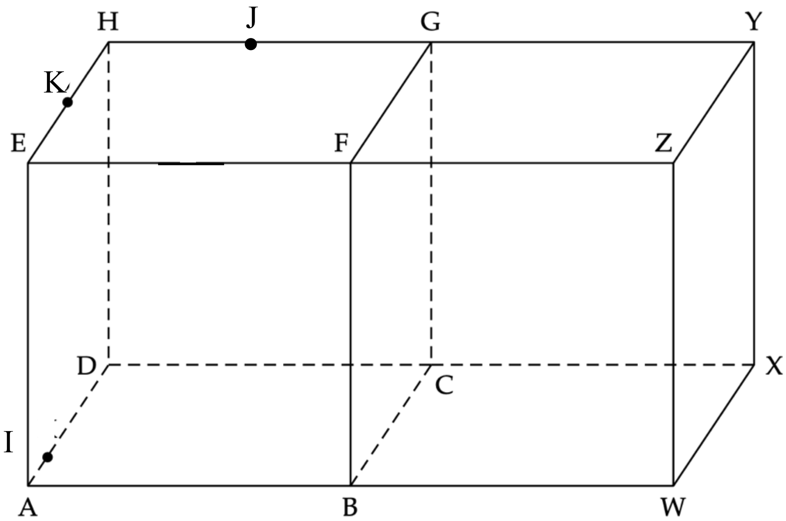
c. En déduire l'année à partir de laquelle il faudra penser à un réaménagement des locaux.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère deux cubes identiques d'arête de longueur 1, ABCDEFGH et BWXCFZYG , qui ont la face BCGF en commun , comme l'illustre la figure ci-dessous.
On note K le milieu du segment [EH], J le milieu du segment [HG] et I le point du segment [AD] tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\ \overrightarrow{AD}$.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

La figure ci-dessous a été reproduite en annexe en page 7.
On complétera au fur et à mesure cette annexe et on la remettra avec la copie.



Partie A

1. Placer sur la figure jointe en annexe les points $L(\frac{3}{4}\,;\frac{1}{2}\,;1)$, $M(2, \frac{1}{4}, 1)$ et $N(\frac{3}{2}\,;1\,;\ 1)$

2. Construire le point R tel que : $\overrightarrow{DR} = 2\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{JK}$

Partie B

1. Lire les coordonnées des points B, E, K, F, I et J.

2. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{LE}$ et $\overrightarrow{LN}$.

b. En déduire que les points E, L et N sont alignés.

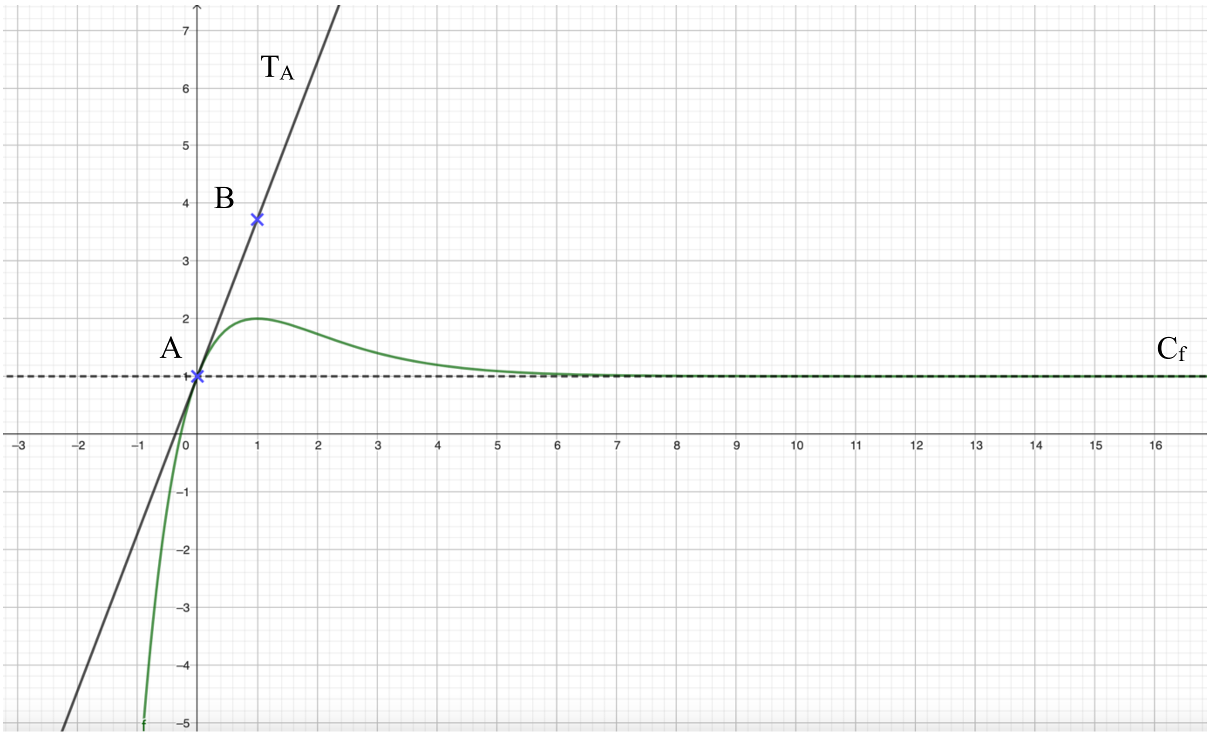
3. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (JK) est $\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = 1 - \frac{1}{2}t \\ z = 1 \end{cases}$, t dans R

4. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (NE) est $\begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}k \\ y = 1 - k \\ z = 1 \end{cases}$, $k \in R$

Montrer que les droites (JK) et (NE) sont sécantes en un point Q dont on déterminera les coordonnées.

EXERCICE 5 (5 points)

On considere la fonction f definie et dérivable sur R dont la courbe representative C_f est tracée ci-dessous à l'aide d'un logiciel. A désigne le point de la courbe C_f d'abscisse 0 et T_A désigne la tangente à la courbe C_f au point A. La tangente T_A passe par le point B(1 ; 1 + e).



Partie A

1. Conjecturer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.
2. Lire f (0).
3. Déterminer graphiquement f ' (0).
4. En déduire l'équation réduite de la tangente T_A à la courbe Cf au point A.

Partie B

Pour la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est definie sur R par

$$f(x) = 1 + xe^{-x+1}$$

1. Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. Justifier que pour tout reel $x, f(x) = 1 + e\left(\frac{x}{e^x}\right)$
3. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout reel x, $f'(x) = (1-x)e^{-x+1}$
5. Etudier les variations de la fonction f sur R et construire son tableau de variations.
6. Demontrer que l'equation $f(x) = 0,21$ admet une unique solution α sur R.
7. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom: .... Classe:...........