EQUATIONS DIFFERENTIELLES

I) Equations du type y =f '(x).

Exemple : on veut résoudre l'équation différentielle suivante y' = $3x^2$
On cherche donc toutes les fonctions f qui vérifient f '(x) = $3x^2$. On en déduit les solutions de l'équation donnée **qui sont en fait les primitives sur R** de la fonction carrée càd les fonctions
f : $x \to x^3$ + C, C dans R. **f est une solution générale.**

Si de plus on veut que f vérifie une condition donnée dite **condition initiale**, par exemple f(0) = 1 on a donc f_0 (x) = x^3+ 1 qui est **une solution particulière** .

Exercice : Résoudre l'équation différentielle suivante y' = $e^x + x + 1$ où y est une fonction dérivable sur R.

…………………………………………………………………………………………..

II) Equations du type y' = ay

Définition

Soit a un réel avec a ≠ 0. On dit qu'une fonction f vérifiant f '(x)= a f(x) est une solution sur R de l'équation différentielle y' = a y .

Ensemble des solutions

Soit a un réel non nul.
L'ensemble des solutions dans R de l'équation différentielle y' = ay est l'ensemble des fonctions f_k définies sur R par f_k (x) = ke^{ax} où k ∈ R

Démonstration p 210

Exemples :
1. y' = 2y les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions du type f_k (x) = ke^{2x} où k ds R
2. y' – 5y = 0 les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions f_k (x) = ke^{5x} où k ds R
3. y = 4y' les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions f_k (x) = $ke^{\frac{1}{4}x}$ où k ds R
4. y' + y = 0 les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions f_k (x) = ke^{-x} où k ds R
5. 2y' + 3 y = 0 les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions f_k (x) = $ke^{-3/2\,x}$ où k ds R

La solution f de l'équation 3 qui vérifie f(4) = 2 est $x \to 2e^{\frac{1}{4}(x-4)}$ soit $x \to 2e^{0,25x-1}$

III) Equations du type y'=ay + b

Propriété

Soit a et b deux réels non nuls.
L'ensemble des solutions dans R de l'équation différentielle y' = ay + b est l'ensemble des fonctions f_k définies sur R par f_k (x) = $ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k ∈ R

Démonstration p 210

Exemples :
1. y' = 2y + 3 les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions du type f_k (x) = $ke^{2x} - \frac{3}{2}$,k ds R
2. y' – 5y = -2 les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions f_k (x)=$ke^{5x} + \frac{2}{5}$, k ds R

IV) Equations du type y' = ay + f

Propriété admise

Soit a un réel non nul et f une fonction définie sur un intervalle I.
Toute solution dans I de l'équation différentielle (E) y' = ay + f est la somme d'une solution quelconque de l'équation y'=ay c'est-à-dire d'une fonction f_k définie sur R par $f_k(x) = ke^{ax}$ où k ∈ R et d'une solution particulière de l'équation (E).

Exemple : l'équation différentielle $y' = 2y + e^x$ admet pour solution particulière la fonction f définie par $f(x) = -e^x$ puisque $f'(x) = -e^x$ et $2f(x) + e^x = f'(x)$.
Les solutions sont les fonctions $f_k(x) = ke^{2x} - e^x$ où k ∈ R