

DM2 TRIMESTRE 2 2024 CORRIGE

A. 1. $g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x}$; sur $]0 ; +\infty[$, $g'(x)$ est strictement positive comme somme de termes positifs, la fonction g est donc strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} 2x^3 - 1 = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

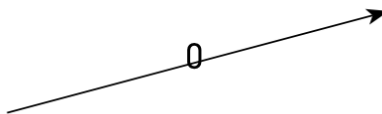
donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

La fonction g est donc strictement croissante et continue sur $]0 ; +\infty[$, de plus pour tout $x \in]0 ; +\infty[$; $g(x) \in \mathbb{R}$; or $0 \in \mathbb{R}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

À l'aide de la calculatrice on a : $\alpha \approx 0.87$

3.

x	0	α	$+\infty$
Sens de variation de g			
Signe de g	-	0	+

B. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\ln x}{x^2} = +\infty$ donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

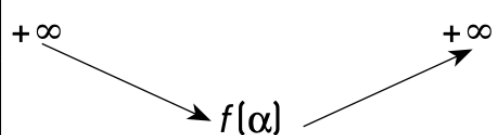
$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissance comparée, donc par somme des limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - 2x = -\frac{\ln x}{x^2}$; or pour tout $x \in]0 ; +\infty[; x^2 > 0$. Le signe de cette différence ne dépend donc que du signe de $-\ln x$. Sur $]0 ; 1[$, $-\ln x > 0$, la courbe \mathcal{C}_f est donc strictement au-dessus de Δ . Sur $]1 ; +\infty[$, $-\ln x < 0$, la courbe \mathcal{C}_f est donc strictement en-dessous de Δ .

$$\begin{aligned} 3. f'(x) &= 2 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = 2 - \frac{x - 2x \ln x}{x^4} \\ &= 2 - \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = \frac{2x^3 - 1 + 2 \ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

Or sur $]0 ; +\infty[$, $x^3 > 0$, le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $g(x)$.

4.

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f	$+\infty$  $+\infty$		

Avec $f(\alpha) = \frac{6\alpha^3 - 1}{2\alpha^2}$ car $2\alpha^3 - 1 + 2 \ln \alpha = 0$ soit

Avec $f(\alpha) = \frac{6\alpha^3 - 1}{2\alpha^2}$ car $2\alpha^3 - 1 + 2 \ln \alpha = 0$ soit

$$\ln \alpha = \frac{1}{2} - \alpha^3.$$