DM2 TRIMESTRE 2 2024 CORRIGE

A. 1. $g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x}$; sur $]0\,;+\infty[$, $g'(x)$ est strictement positive comme somme de termes positifs, la fonction g est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} 2x^3 - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^3 - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ donc par somme de limites, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.

La fonction g est donc strictement croissante et continue sur$]0\,;+\infty[$, de plus pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$; $g(x) \in \mathbb{R}$; or $0 \in \mathbb{R}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

À l'aide de la calculatrice on a : $\alpha \approx$ 0.87

3.

x	0		α		$+\infty$
Sens de variation de g		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
Signe de g		$-$	0	$+$	

B. 1. $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{\ln x}{x^2} = +\infty$ donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissance comparée, donc par somme des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - 2x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$; or pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$; $x^2 > 0$. Le signe de cette différence ne dépend donc que du signe de $-\ln x$.

Sur $]0\,;1[$, $-\ln x > 0$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est donc strictement au-dessus de Δ. Sur $]1\,;+\infty[$, $-\ln x < 0$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est donc strictement en-dessous de Δ.

3. $f'(x) = 2 - \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = 2 - \dfrac{x - 2x\ln x}{x^4}$

$$= 2 - \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = \frac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

Or sur $]0\,;+\infty[$, $x^3 > 0$, le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $g(x)$.

4.

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Sens de variation de f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Avec $f(\alpha) = \dfrac{6\alpha^3 - 1}{2\alpha^2}$ car $2\alpha^3 - 1 + 2\ln\alpha = 0$ soit

Avec $f(\alpha) = \dfrac{6\alpha^3 - 1}{2\alpha^2}$ car $2\alpha^3 - 1 + 2\ln\alpha = 0$ soit

$\ln\alpha = \dfrac{1}{2} - \alpha^3$.