DEVOIR N°2 TERMINALE SPECIALITE TRIMESTRE 1 2023. CORRIGE

EX 1

On a une indéterminée du type $+\infty - \infty$.

On lève l'indéterminée en factorisant par le terme de plus haut degré :

$n^3 - 4n^2 + 2$

$U_n = n^3(1 - \frac{4}{n} + \frac{2}{n^3})$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-4}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} = 0$ donc par somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \frac{4}{n} + \frac{2}{n^3}) = 1$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

EX 2

Sn est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique (Un) de premier terme $U_1 = \frac{1}{4}$ et de raison $q = \frac{1}{4}$ donc

$S_n = \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc par différence $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$.

Et finalement par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Sn} = \frac{1}{3}$

EX 3

1°) f est une fonction homographique donc dérivable sur son ensemble de définition , ici l'intervalle I donc on a :

$f'(x) = \frac{5(x+4)-1(5x+6)}{(x+4)^2} = \frac{14}{(x+4)^2}$. Comme $f' > 0$ pour tout réel x de $[0; 3]$ alors f est strictement croissante sur $[0; 3]$:

x	0	3
f '(x)	+	
f (x)	$\frac{3}{2}$ ↗	3

2°) On considère la propriété Pn : $0 \leq U_n < 3$

Initialisation : pour n=0 on a $U_0 = 0$, or $0 \leq 0 < 3$ donc $0 \leq U_0 < 3$ et P_0 est vraie

Hérédité : On suppose la propriété vraie **pour un entier naturel n** càd $0 \leq U_n < 3$.
Notre objectif est de démontrer que Pn+1 est vraie à savoir $0 \leq U_{n+1} < 3$.

Par hypothèse de récurrence $0 \leq U_n < 3$

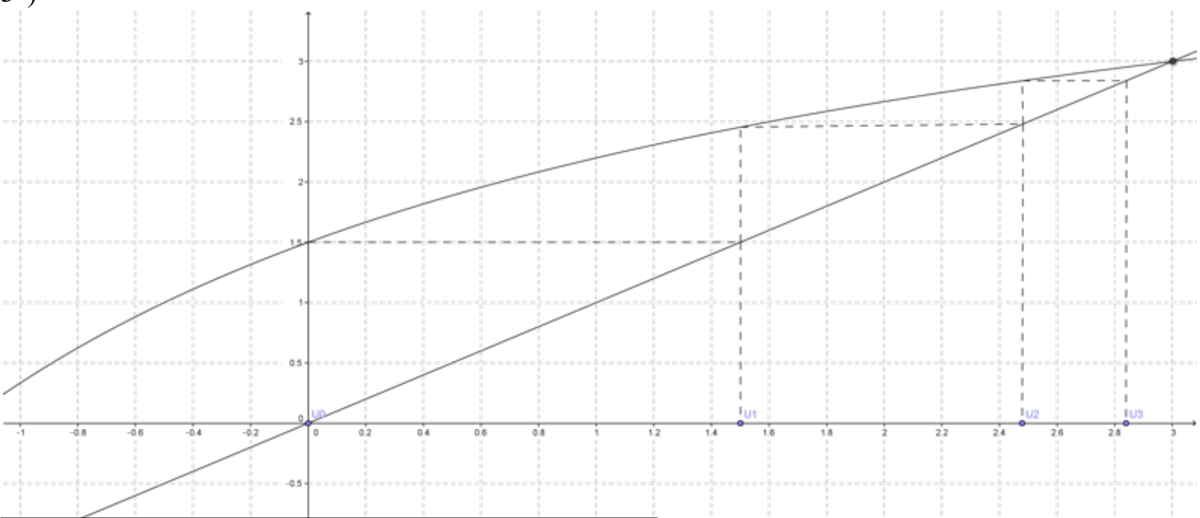
Alors d'après le 1)a), **comme f est strictement croissante**

$$f(\ 0\ ) \leq f(U_n\ ) < f(\ 3\ ) \quad \text{soit encore d'après le 1°)}$$
$$\frac{3}{2} \leq U_{n+1} < 3$$

C'est-à-dire finalement $0 \leq U_{n+1} < 3$ et la propriété P n+1 est vraie.

Conclusion : P_n est vraie au rang 0, elle est héréditaire, on a démontré par récurrence que
pour tout entier naturel n $0 \leq U_n < 3$.

3°)



x	-1	0	1	2	3
f(x)	0.2	0.66	0.48	0.37	0.29

Le graphique suggère la convergence vers 3 de la suite (U_n).

2°) a) Pour tout entier naturel n on a

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}+2}{U_{n+1}-3} = \frac{\frac{5U_n+6}{U_n+4}+2}{\frac{5U_n+6}{U_n+4}-3} = \frac{\frac{5U_n+6}{U_n+4}+\frac{2U_n+8}{U_n+4}}{\frac{5U_n+6}{U_n+4}-\frac{3U_n+12}{U_n+4}} = \frac{\frac{7U_n+14}{U_n+4}}{\frac{2U_n-6}{U_n+4}} = \frac{7(U_n+2)}{2(U_n-3)} = \frac{7}{2}V_n$$

On en déduit que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{2}$ et de premier terme $V_0 = \frac{-2}{3}$

D'où $\mathbf{V_n = \frac{-2}{3}\left(\frac{7}{2}\right)^n}$ pour tout n de N.

b) Pour tout n de N on a

$V_n = \frac{U_n+2}{U_n-3}$ équivaut à $V_n(U_n - 3) = U_n + 2$ soit à $U_nV_n - 3V_n = U_n + 2$

c'est-à-dire $U_nV_n - U_n = 3V_n + 2$

$U_n(V_n - 1) = 3V_n + 2$

d'où finalement $U_n = \frac{3V_n+2}{V_n-1}$.

On en déduit que $U_n = \frac{-2\left(\frac{7}{2}\right)^n+2}{\frac{-2}{3}\left(\frac{7}{2}\right)^n-1} = 2\,\frac{\left(\frac{7}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{3}\left(\frac{7}{2}\right)^n+1} = 3.\,\frac{\left(\frac{7}{2}\right)^n-1}{\left(\frac{7}{2}\right)^n+\frac{3}{2}}$

c) $U_n = 3.\,\frac{\left(\frac{7}{2}\right)^n\left(1-\left(\frac{2}{7}\right)^n\right)}{\left(\frac{7}{2}\right)^n\left(1-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n\right)} = 3\,\frac{1-\left(\frac{2}{7}\right)^n}{1-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n}$

Comme $0<\frac{2}{7}<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$ et par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{2}{7}\right)^n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n = 1$

puis par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{7}\right)^n}{1-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n} = 1$ et enfin par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$.