DM N°3 12/12/2016 CORRIGE

EX 1

- $f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi) + \sin(2(x+2\pi))$
$= 2\sin x + \sin(2x+4\pi)$
$= 2\sin x + \sin 2x$
$= f(x)$

Par conséquent, $T = 2\pi$ est une période de la fonction f.

L'étude de f peut ainsi se faire uniquement sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

- $f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x) = -2\sin x - \sin 2x = -f(x)$

Par conséquent, la fonction f est impaire.

Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine et l'étude de f peut se faire uniquement sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

- Pour dresser le tableau de variations sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ de la fonction f, étudions le signe de sa dérivée f'.

- Si la fonction est périodique de période T, l'étude se fera sur un intervalle $I = [a ; a+T]$, le reste de la courbe étant obtenu à partir de celle sur I à l'aide de translations.

En général, I sera $[0 ; T]$ ou $\left[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2}\right]$.

- Il est intéressant d'étudier la parité de la fonction. En effet si elle est paire, sa courbe admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, et si elle est impaire, sa courbe admet l'origine comme centre de symétrie.

Dans ces deux cas, l'intervalle d'étude $\left[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2}\right]$ pourra être réduit de moitié.

- L'étude des variations de f à l'aide du signe de sa dérivée permet de justifier la courbe.

$f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 2\cos x + 2(2\cos^2 x - 1) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2$

En posant $X = \cos x$:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4X^2 + 2X - 2 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{2}$ ou $X = -1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = -1$

Ainsi, sur $[0 ; \pi]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \pi$.

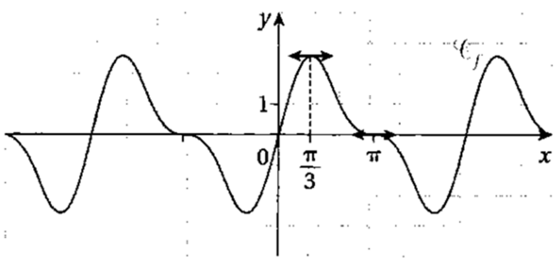
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4X^2 + 2X - 2 > 0 \Leftrightarrow (2X-1)(X+1) > 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 1) > 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0 ; \frac{\pi}{3}\right[$

D'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	0
f	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

- La courbe de f dans un repère orthonormé est :



EX 2

1°) Pour tout réel x $\sqrt{x^2+4} > \sqrt{x^2}$ soit $\sqrt{x^2+4} > |x|$.
Comme $|x| \geq x$ pour tout réel x, alors $\sqrt{x^2+4} > x$ pour tout réel x.

2°) a) $g'(x) = 2 - \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = 2 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

$$g'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+4} - x}{\sqrt{x^2+4}}$$

Comme $\sqrt{x^2+4} > x$ pour tout réel x alors

$2\sqrt{x^2+4} > x$ et $g'(x) > 0$ pour tout réel x.

b)

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

c) La fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui contient 0 donc d'après le théorème de la bijection l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Comme $f(1{,}15) \simeq -0{,}007$ et $f(1{,}16) = 0{,}008$ on en déduit que $1{,}15 < \alpha < 1{,}16$ et $\boxed{\alpha \simeq 1{,}15}$.

d)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

3°) a) <u>limite de f en $+\infty$</u>

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2\sqrt{x^2+4} - x\right)\left(2\sqrt{x^2+4} + x\right)}{2\sqrt{x^2+4} + x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4(x^2+4) - x^2}{2\sqrt{x^2+4} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2+16}{2\sqrt{x^2+4} + x}$$

$x > 0$ donc $|x| = x$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(3 + \frac{16}{x^2}\right)}{2|x|\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(3 + \frac{16}{x^2}\right)}{x\left(2\sqrt{2 + \frac{4}{x^2}} + 1\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(3 + \frac{16}{x^2}\right)}{2\sqrt{2 + \frac{4}{x^2}} + 1}$$

On $\lim_{x \to +\infty} 3 + \frac{16}{x^2} = 3$; de plus $\lim_{x \to +\infty} 2 + \frac{4}{x^2} = 2$ et $\lim_{X \to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$

donc par composition des limites

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{2 + \frac{4}{x^2}} = \sqrt{2}$$

donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{3 + \frac{16}{x^2}}{2\sqrt{2 + \frac{4}{x^2}} + 1} = \frac{3}{2\sqrt{2} + 1}$.

On en déduit finalement que $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

<u>limite de f en $-\infty$</u>

$\lim_{x \to -\infty} 2\sqrt{x^2+4} = +\infty$ car $\lim_{x \to -\infty} x^2+4 = +\infty$

$\lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ et par composition des limites on a le résultat.

On a aussi $\lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$ donc par somme des limites

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$$

b) $$f'(x) = 2\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\right) - 1 = \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} - 1$$

$$f'(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+4}}.$$

c) Comme $\sqrt{x^2+4} > 0$ pour tout réel x on en déduit que $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ ce qui donne le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3α	$\nearrow$	$+\infty$

Rq : $2\alpha = \sqrt{\alpha^2+4}$
donc
$f(\alpha) = 4\alpha - \alpha = 3\alpha$!

10°) $D : y = x$.

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{x^2+4} - 2x$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{4(x^2+4) - 4x^2}{2\sqrt{x^2+4} + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{16}{2\sqrt{x^2+4} + 2x}$$

On a déjà montré que $\lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{x^2+4} + 2x = +\infty$

donc $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = 0$ et la droite D d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

$D' : y = -3x$.

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-3x)] = \lim_{x \to -\infty} 2\sqrt{x^2+4} - x + 3x = \lim_{x \to -\infty} 2\sqrt{x^2+4} + 2x$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + 3x] = \lim_{x \to -\infty} \frac{16}{2\sqrt{x^2+4} - 2x} = 0$$ donc D' est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $-\infty$.