FONCTIONS
FICHE 3 : DERIVATION

I)Nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. a un élément de I. h est un réel quelconque tel que a + h dans I

f est DERIVABLE en a si et seulement si f vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=l$ où l est un réel
2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$ où l est un réel
3. $f(a+h)=f(a)+h.l+h\,\varphi(h)$ où $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$

Le réel l trouvé ci – dessus est le nombre dérivé de f en a noté f ' (a)

Applications :
a)Utilisation pour calculer une limite

Déterminer la limite en 0 des fonctions $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x)=\dfrac{\cos x - 1}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=(\sin)'(0)=\cos 0=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 0}{x-0}=(\cos)'(0)=-\sin 0=0$$

b) Prouver la dérivabilité d'une fonction en un point

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$. Montrer que f est dérivable en 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0$$ donc f est dérivable en 0 et f '(0) = 0.

c) Dérivabilité et continuité

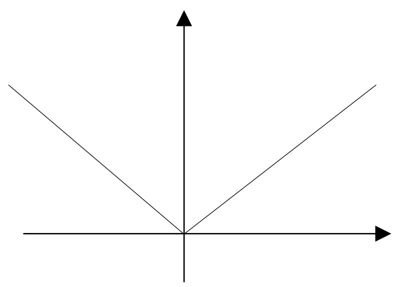
Si une fonction est DERIVABLE sur un intervalle I alors elle est CONTINUE sur I .

ATTENTION la réciproque est fausse

Démonstration : soit a dans I.Si f dérivable en a alors $f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+h\,\varphi(h)$ où $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$

donc $\lim\limits_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$ càd $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ et f est continue en a .

Contre – ex : Soit f la fonction définie sur R par $f(x)=|x|$



f est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0

II) Fonction dérivée

Définition :

Une fonction f dérivable en tout point d'un intervalle I est dérivable sur I.On note f ' la fonction dérivée de f sur I.

1°) *F*ormulaires des *f*onctions usuelles

f désigne une *f*onction dé*f*inie et dérivable sur un intervalle I .

f	D*f*	*f'*	D *f'*
a	R	0	R
x		1	
ax + b		a	
x^2		$2x$	
ax^2		2ax	
x^3		$3x^2$	
ax^3		3ax^2	
x^n n∈N*		nx^{n-1}	
$\frac{1}{x}$	R*	$-\frac{1}{x^2}$	R*
$\frac{1}{x^2}$	R*	$-\frac{2}{x^3}$	R*
$\frac{1}{x^n}$ n∈N*	R*	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	R*
$\sqrt{x}$	R^+	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	R^{+*}
cos$x$	R	-sin$x$	R
sin$x$	R	cos$x$	R
tan$x$	R\{ (2k+1)π/2}	1 + tan^2x	R\{ (2k+1)π/2}
e^x	R	e^x	R
ln x	R*+	$\frac{1}{x}$	R*+

2°) Opérations sur les fonctions dérivables :rappel des formules usuelles complément sur la dérivation.

Dans ce paragraphe les fonctions u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

OPERATIONS	EXEMPLES : Dans chaque cas calculer la dérivée de la fonction donnée sur I.
Somme $\boxed{(U + V)' = U' + V'}$	Soit f la fonction définie sur [1 ;18] par $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$
Produit par un réel $\boxed{(aU)' = aU'}$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = 5x^6$ $f'(x) = 30\ x^5$
Produit $\boxed{(UV)' = U'V + UV'}$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (x^6 + x)(2x^5 + 1)$ Méthode : $U(x) = x^6 + x$ $\quad U'(x) = 6x^5 + 1$ $V(x) = 2x^5 + 1$ $\quad V'(x) = 10x^4$ $f'(x) = (6x^5 + 1)(2x^5 + 1) + (x^6 + x)(10x^4)$ $f'(x) = 22x^{10} + 18x^5 + 1$
Carré $\boxed{(U^2)' = 2U'.U}$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (x^4 + x^3 - 5)^2$ $U(x) = x^4 + x^3 - 5$ $\quad U'(x) = 4x^3 + 3x^2$ $f'(x) = 2(4x^3 + 3x^2)(x^4 + x^3 - 5)$ $f'(x) = 2x^2(4x + 3)(x^4 + x^3 - 5)$
Puissance entière $\boxed{(U^n)' = n\,U'.U^{n-1}}$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (x^2 + 3x + 4)^3$ $U(x) = x^2 + 3x + 4$ $\quad U'(x) = 2x + 3$ $f'(x) = 3(2x + 3)(x^2 + 3x + 4)^2$
Inverse ($U \neq 0$ sur I) $\boxed{\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2}}$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ $U(x) = x^2 + 1$ $\quad U'(x) = 2x$ $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$

(U ≠ 0 sur I) $\boxed{\left(\frac{1}{U^n}\right)' = -\frac{n\,U'}{U^{n+1}}}$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \frac{1}{(x^4+x^2)^5}$ $U(x) = x^4 + x^2 \qquad U'(x) = 4x^3 + 2x$ $f'(x) = -\frac{5(4x^3+2x)}{(x^4+x^2)^6}$
Quotient (V≠ 0 sur I) $\boxed{\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}}$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+2}$ Méthode : $U(x) = 3x+1 \qquad U'(x) = 3$ $V(x) = x^2+2 \qquad V'(x) = 2x$ $f'(x) = \frac{(3x^2+6) - (3x+1)(2x)}{(x^2+2)^2}$ $f'(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 6}{(x^2+2)^2}$
Racine carrée(U>0 sur I) $\boxed{\sqrt{U} = \frac{U'}{2\sqrt{U}}}$	Soit f la fonction définie sur [3 ; 10] par $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ $U(x) = x^2 - x - 2 \qquad U'(x) = 2x - 1$ $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$
COMPOSEE Soit g une fonction dérivable sur un intervalle J. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que u(I)⊂J.Alors la fonction f définie par $f(x) = g(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I, $\boxed{\mathbf{f'(x) = u'(x) \times g'(u(x))}}$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \cos(x^2 + 3x + 4)$ $f'(x) = -(2x+3)\sin(x^2+3x+4)$ Remarque : $(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$ $(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$ $(\cos U)' = -U' \sin U$ $(\sin U)' = U' \cos U$

III)Interprétation graphique du nombre dérivé : tangente à une courbe .

1°) Tangente à une courbe et nombre dérivé

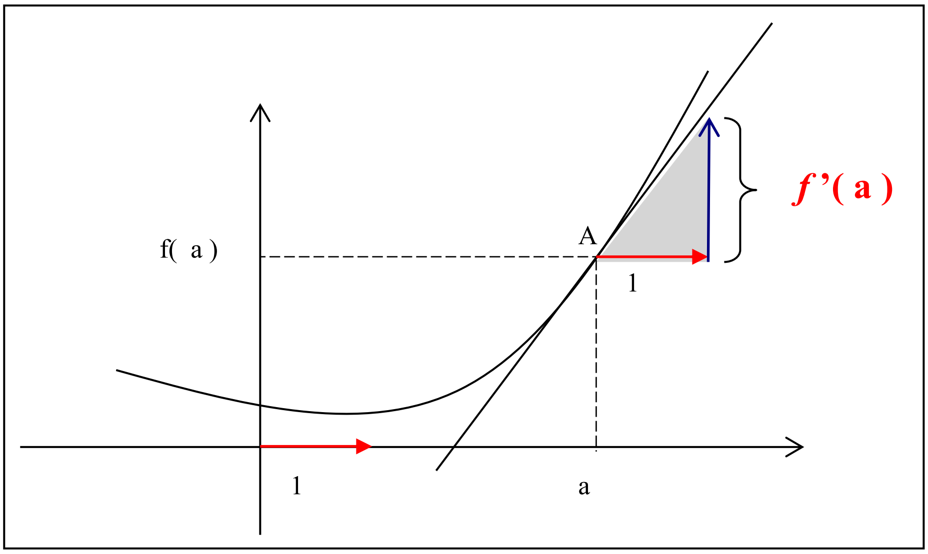
a)Equation d'une tangente

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un élément de I.C est la courbe de f dans un repère (O ; i , j) .
Si f' est la fonction dérivée de f sur I alors

le nombre dérivé de f en a, f'(a), est

Le coefficient directeur de la tangente à C

au point d'abscisse a est aussi



Conséquence

L'équation réduite de la tangente à C au point A d'abscisse a c'est - à - dire au point de coordonnées (a ; f(a)) est

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

ATTENTION beaucoup d'exercices de bac utilisent cette formule , elle est à savoir parfaitement

Remarques :

Une équation de la tangente au point **d'abscisse 0**, s'écrit $y = f'(0)\, x + f(0)$

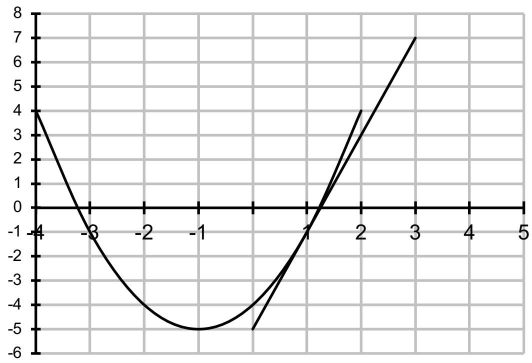
b) Cas particulier important : tangente horizontale

La tangente à la courbe en un point d'abscisse a est horizontale ssi $\boldsymbol{f'(a) = 0}$

2°) EXEMPLES :

Ex 1

On a représenté graphiquement la fonction f définie sur [-4 ; 2] par $f(x)= x^2 + 2x - 4$ .On note C la courbe obtenue.
1°) Calculer la dérivée f ' de f.
2°) Montrer qu'une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1 est $y = 4x - 5$.
3°) Tracer T .

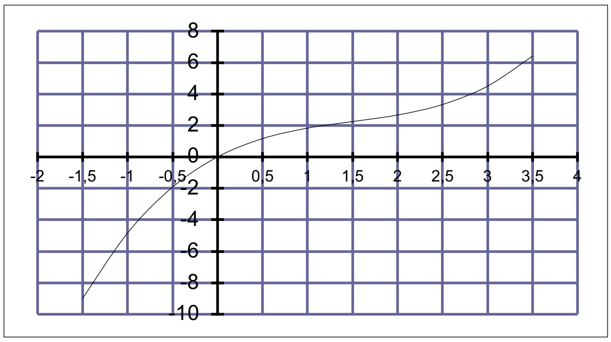


1°) $f'(x)= 2x + 2$
2°) Equation de la tangente T au point d'abscisse 1 :

$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$
soit $y = 4 (x - 1) - 1$ Soit encore $y = 4x - 5$

Exercice 2

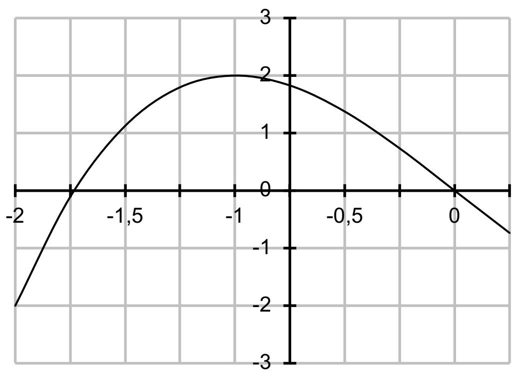
Soit la fonction f définie sur [-2 ; 4] par
$f(x)= x^3 /3- 1.5.x^2+3x$. On note C sa courbe ci-contre .
1°) Calculer la dérivée f' de f.
2°) Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.
3°) Tracer T .
4°) Déterminer une équation de la tangente à C aux points de la courbe où elle est parallèle à la droite d'équation $y = x + 1$.



Corrigé : 1°) $f'(x) = x^2 – 3x + 3$ 2°) $y = f'(0) x + f(0)$ soit $y = 3x$
4°) On cherche les points dont l'abscisse vérifie l'équation $f'(x) = 1$ c'est – à – dire $x^2 – 3x + 2 = 0$
1 est solution évidente l'autre solution est 2 ; les points cherchés sont les points A(1, 11/6) et B(2 ; 8/3)
Equation réduite de la tangente T_A : $y = x + 5/6$ de la tangente T_B : $y = x + 2/3$

Exercice 3

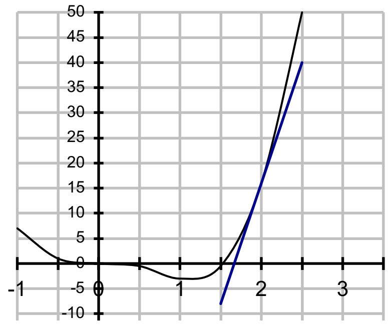
Soit f la fonction définie sur [-2 ; ¼] par $f (x) = x^3 - 3x$ dont la courbe C est donnée ci-contre.
1°) Tracer la tangente à C au point d'abscisse -1.
Quel est sa particularité ?
2°) Donner une équation de la tangente T à C au point O.
puis étudier algébriquement la position relative de C et T.



Corrigé : 1°) $f'(- 1) = 0$ la tangente est donc HORIZONTALE au point d'abscisse -1 .
2°) $y = -3x$ On doit donc étudier le signe de $f(x) - (- 3x) = x^3$ On en déduit que C est au dessus de T si $x>0$ et en dessous si $x< 0$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur [-2 ;2]
dont la courbe C est donnée ci-contre.



1°) Déterminer le nombre dérivé de f en 2.
2°) Donner une équation de la tangente à C au point d'abscisse 2.

> Corrigé : 1°) f ' (2) = + 25/+0.5 = 50
> Car f '(2) est le COEFFICIENT DIRECTEUR DE LA TANGENTE AU POINT D'ABSCISSE 2.
> 2°) y = 50 x - 8 5