CONTROLE DE MATHS N°2. 1 H. Le 19/11/19.CORRIGE

Exercice 1(5 pts) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1°) $4x^4 - 15x^2 - 4 = 0$

équivaut à résoudre le système $\begin{cases} X = x^2 \\ 4X^2 - 15X - 4 = 0 \text{ (E)} \end{cases}$

(il s'agit d'une équation bicarrée on effectue un changement de variable pour la résoudre)

$\Delta = (-15)^2 - 4\times4\times(-4) = 289$

$x_1 = \dfrac{15 + 17}{8} = 4$ $\quad x_2 = \dfrac{15 - 17}{8} = -0.25$

Donc la seule solution acceptable est 4 car X est positif .

Soit $x^2 = 4$ d'où x = -2 ou x = 2

D'où S = { - 2 ; 2}

2°) $\sqrt{2x^2 + 1} = x - 1$ équivaut à $2x^2 + 1 = (x - 1)^2$ et $x \geq 1$

soit $2x^2 + 1 = x^2 - 2x + 1$

$x^2 + 2x = 0$

$x(x + 2) = 0$

or $x \geq 1$ donc S = $\emptyset$

3°) a) Résoudre dans R l'inéquation $3x^2 - 5x - 2 \geq 0$

a = 3 donc c'est le cas où a positif ; $\Delta = 49$ $\quad x_1 = -\frac{1}{3}$ $\quad x_2 = 2$

D'après la règle sur le signe du trinôme

x	$-\infty$		$-1/3$		2		$+\infty$
f(x)		+	0	-	0	+	

S =] $-\infty$;$-\frac{1}{3}$] U[2;$+\infty$[

b) D'après précédemment $3x^2 - 5x - 2 \leq 0 \;\; si\; x \in \left[-\frac{1}{3}; 2\right]$ soit $-3x^2 + 5x + 2 \geq 0$ si $x \in \left[-\frac{1}{3}; 2\right]$

Comme il est aussi nécessaire que $x + 3 \geq 0$ càd $x \geq -3$ *on a bien* Df = $\left[-\frac{1}{3}; 2\right]$

$\sqrt{-3x^2 + 5x + 2} = \sqrt{x + 3}$ équivaut alors à $-3x^2 + 5x + 2 = x + 3$ soit à $3x^2 - 4x + 1 = 0$

1 solution évidente , l'autre solution est 1/3 . Les deux appartiennent à Df donc S = { 1/3 ; 1 }

Exercice 2 (5 points)

Soit A(-4 ;0), B(-6 ;1), C(2 ;3) , D(-2 ;5) et E(1 ;5)

1°) Donner une équation cartésienne de la droite (BC)

Un vecteur directeur de (BC) est $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ Or les coordonnées d'un vecteur directeur sont $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

d'où b= -8 et a = 2

On en déduit qu'une équation cartésienne de (BC) est $2x - 8y + c = 0$

Comme C(2 ;3) ∈ (BC) alors 4 - 24 + c = 0 d'où c= 20

Et (BC) : $2x - 8y + 20 = 0$

En divisant par 2 pour avoir une équation plus « simple » on a (BC) : $x - 4y + 10 = 0$

(non obligatoire , la première équation suffit)

2°) a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Donner l'équation de (d) la parallèle à (AB) passant par C.

Comme (d)//(AB) elles ont le même vecteur directeur càd $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Or les coordonnées d'un vecteur directeur sont $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ d'où b= 2 et a = 1. On en déduit qu'une équation cartésienne de (d) est x + 2y + c = 0

Comme C(2 ;3) ∈ (d) alors 2 + 6 + c = 0 d'où c= -8

Et (d) : x +2 y – 8 = 0

Passe-t-elle par le point D ?

-2 + 2x 5 – 8 = 10 – 10 = 0 donc elle passe par le point D.

3°) a) Vérifier qu'une équation cartésienne de (AE) est -x + y – 4 = 0 .

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Et les coordonnées de A vérifient -(-4) + 0 – 4 = 0

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre (AE) et (BC)

Pour déterminer les coordonnées du point G on résout le système suivant :

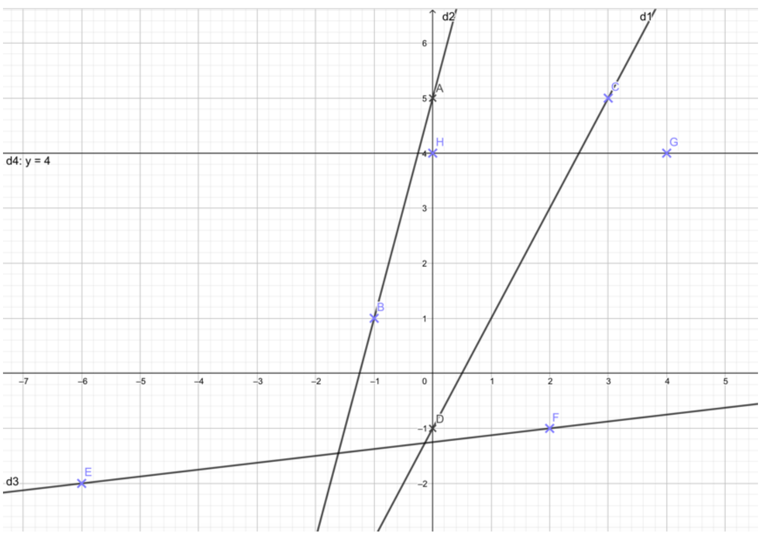
$\begin{cases} -x + y - 4 = 0 \\ x - 4y + 10 = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} -x + y = 4 \\ x - 4y = -10 \end{cases}$

En additionnant la ligne1 et la ligne 2 on obtient

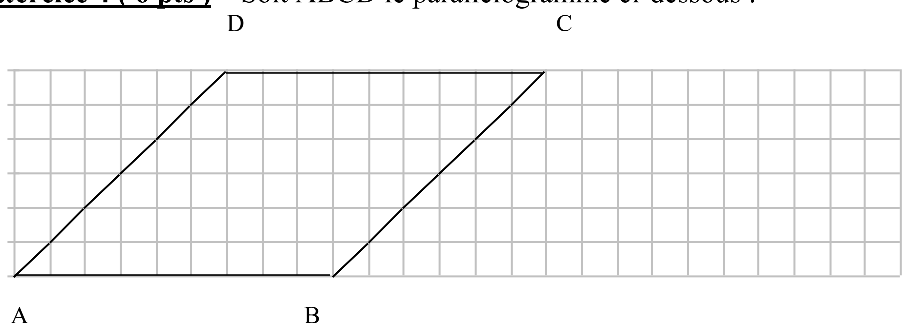
$\begin{cases} -3\,y = -6 \\ x - 4y = -10 \end{cases}$ soit finalement $\begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

D'où les coordonnées du point d'intersection sont ($-2;\ 2$)

<u>Exercice 3 (4 points)</u>



Exercice 4 (6 pts) Soit ABCD le parallélogramme ci-dessous :



1°) Placer ci - dessus les points I,J,K et L tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{9}\ \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{6}\ \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$; et K milieu de [AD].

2°) a) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

c) En déduire que les droites (KL) et (IJ) sont parallèles.

Comme $\overrightarrow{KL} = 3\ \overrightarrow{IJ}$, les vecteurs sont colinéaires et (KL)// (IJ)

3°) On se place dans le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$).

a) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, I,J,K et L

a) A (0 ; 0) B(1 ; 0) C(1 ;1) D(0 ; 1) I($\frac{7}{9}$;0) J(1 ;$\frac{1}{6}$) K (0 ; $\frac{1}{2}$) L ($\frac{2}{3}$; 1)

Correction Non détaillée pour la suite

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (KJ)

(KJ) : $\frac{1}{3}x + y - \frac{1}{2} = 0$

c) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IL)

(IL) : $9x + y - 7 = 0$

d) Montrer que les droites (KJ) et (IL) sont sécantes puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection H .

Les vecteurs $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{JL}$ ne sont pas colinéaires donc les droites sont sécantes .

On trouve en résolvant le système que H (;)