<u>CONTROLE TS TRIMESTRE 2 11/02/20 DUREE 3 H</u>

<u>EXERCICE 1 (4 points)</u>

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront précisées à 10^{-4} *près.*

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ...Une suite de 8 bits est appelé un octet. Par exemple, 10010110 est un octet. Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit, appelé bit de parité et qui est transmis après les huit bits de l'octet.

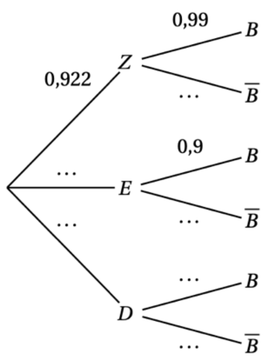
On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité. Une étude statistique a permis d'obtenir que :

- La probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut 0,922;
- La probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut 0,075;
- Si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0, 99 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut 0,9 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0, 99.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les évènements suivants :

- Z: «les huit bits de l'octet sont transmis avec aucune erreur»;
- E: «les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur»;
- D: «les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs»;
- B: «le bit de parité est transmis sans erreur».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous



2. Quelle est la probabilité que l'octet soit transmis avec une erreur exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur ?
3. Calculer la probabilité de l'évènement B.

EXERCICE 2 (6 points)

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. (Les limites ne sont pas attendues.)
2. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
2. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = e^{-x} g(x).$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $[-1; 0]$.
   (b) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
   (c) En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.
5. (a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T.

EXERCICE 3 (5 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

PARTIE A

Soient les deux nombres complexes :

$$z_1 = 1 - i \quad \text{et} \quad z_2 = -8 - 8\sqrt{3}i.$$

On pose :

$$Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Donner la forme algébrique de Z.

2. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

3. Écrire Z sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.

4. En déduire que $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

PARTIE B

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = i$, $z_C = -1$, $z_D = -i$.

1. L'ensemble des points d'affixe z telle que $|z+i| = |z-1|$ est :

- le milieu du segment [BC],
- le cercle de centre O et de rayon 1,
- la médiatrice du segment [AD].

2. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\dfrac{z+i}{z+1}$ soit un imaginaire pur est :

- le cercle de diamètre [CD] privé du point C,
- le cercle de diamètre [BD] privé du point C,
- la médiatrice du segment [AB].

3. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\arg(z-i) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est :

- le demi-cercle de diamètre [BD] passant par A,
- la droite (BD),
- la demi-droite]BD) d'origine B passant par D privée de B,

EXERCICE 4 (5 points)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.