Nom :

CONTROLE N°4 TERMINALE SPECIALITE MATHEMATIQUES DUREE 2H

Exercice 1 (4 pts)

Soit la suite (U_n) définie par $U_n = 2 + \frac{1}{3n+1}$

1°) Calculer U_0, U_1 et U_2

2°) a) Vérifier que $U_{n+1} = 2 + \frac{1}{3n+4}$

b) Montrer alors que $U_{n+1} - U_n = \frac{-3}{(3n+4)(3n+1)}$

c) En déduire la monotonie de la suite.

3°) Sachant que $U_n - 2 = \frac{1}{3n+1}$, montrer que (U_n) est minorée par 2 .

4°) En déduire que la suite est convergente **sans utiliser les propriétés sur les opérations des limites.(On ne demande pas de calculer la limite)**

Exercice 2 (4 pts)

Déterminer la limite des suites suivantes :

1°)(U_n) est la suite définie par $U_n = 3n^2 + n + 30000$

2°)(V_n) est la suite définie par $V_n = 6 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n^3}$

3°) (T_n) est la suite définie par $T_n = 2 - \frac{10}{4^n}$

Exercice 3 (2 pts)

On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 5 + \frac{sin(4n+2)}{n^3+1}$

1°) Montrer que pour tout n de N : $5 - \frac{1}{n^3+1} \leq U_n \leq 5 + \frac{1}{n^3+1}$

2°) A l'aide du 1°) déterminer la limite de (U_n).

Exercice 4 (5 pts)

On considère la suite (U_n) définie par U_0= 10 000 et pour tout entier naturel *n* :

$$U_{n+1}=0,95U_n +200.$$

1. Calculer U_1 et vérifier que U_2=9415.

2.a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel *n* :

$$U_n >4000$$

b. **On admet que la suite (U_n) est décroissante**. Justifier qu'elle converge.

3.Pour tout entier naturel *n*, on considère la suite (V_n) définie par : $V_n=U_n-4000$.

a. Calculer V_0.

b. Démontrer que la suite (V_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

c. En déduire que pour tout entier naturel *n*: $\mathbf{U_n = 4000 + 6000\times0,95^n}$.

d. Quelle est la limite de la suite (U_n)?Justifier la réponse.

4.En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021. Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

Exercice 5 (5 pts)

1°) QCM : Entourer la réponse juste.(2 pts)

1 Lorsque x tend vers $+\infty$, la limite de $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x}$ est :

a 1.

b une forme indéterminée.

c 0.

2 La limite de $g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à :

a $+\infty$ b $-\infty$ c 0

3 Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ est :

a $+\infty$.

b une forme indéterminée.

c 0.

4 Lorsque x tend vers $+\infty$, la limite de $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$ est :

a 1.

b $+\infty$.

c une forme indéterminée.

5 Lorsque x tend vers -1 avec $x < -1$, la limite de $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ est :

a 2 b $+\infty$ c $-\infty$

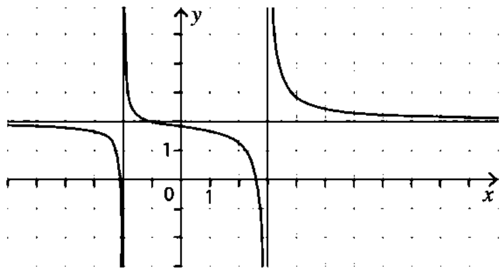
6 La limite de $f(x) = \cos\left(\frac{x^2-10}{2x^4+7x+2}\right)$ en $+\infty$:

a Une forme indéterminée

b $-\infty$

c 1

7 La fonction f est donnée par la courbe ci-dessous.



a La droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe représentative de f.

b La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à la courbe représentative de f.

c La droite d'équation $x = 3$ est asymptote à la courbe représentative de f.

2°) Vrai /Faux : Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse. (3 pts)

1- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Affirmation : Si, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \leqslant f(x)$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2- Soit a un nombre réel. Soient g une fonction telle que $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ et h une fonction telle que $\lim_{x \to a} h(x) = +\infty$.
Affirmation : On a $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$.

3- La fonction f, définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = -5 + \frac{1}{x} + \cos(x)$$
est encadrée par les fonctions $g(x) = -6 + \frac{1}{x}$ et $h(x) = -4 + \frac{1}{x}$.
Affirmation : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -5$