CONTROLE N°4 CORRIGE

EX 1

1°) $U_0 = 3.5$ $U_1 = 3 + \frac{2}{3+4} = \frac{23}{7}$ $U_2 = 3 + \frac{2}{6+4} = 3.$

2°) a)Pour tout entier n de N:

$U_{n+1} = 3 + \frac{2}{3(n+1)+4} = 3 + \frac{2}{3n+3+4} = 3 + \frac{2}{3n+7}$

b) $U_{n+1} - U_n = 3 + \frac{2}{3n+7} - 3 - \frac{2}{3n+4} = \frac{2}{3n+7} - \frac{2}{3n+4} = \frac{6n+8-6n-14}{(3n+4)(3n+7)} = \frac{-6}{(3n+4)(3n+7)}$

c) Comme pour tout n de N $(3n+4)(3n+7) > 0$ alors $\frac{-6}{(3n+4)(3n+7)} < 0$ et $U_{n+1} - U_n < 0$

soit finalement $U_{n+1} < U_n$ pour tout n de N. La suite (Un) est strictement décroissante.

3°) Pour tout entier n de N

$U_n - 3 = \frac{2}{3n+4}$ .Or $\frac{2}{3n+4} > 0$ pour tout n de N donc $U_n - 3 > 0$ c'est-à-dire $U_n > 3$ pour tout n de N. (Un) est donc minorée par 3.

4°) (Un) est strictement décroissante et elle est minorée par 3 donc , d'après le théorème de convergence monotone , elle converge.

Ex 2 1°) On a une indéterminée « $\infty - \infty$ » . Donc on factorise par n^4

$$U_n = n^4\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{400}{n^3}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^4 = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{400}{n^3} = 0 \text{ donc par somme } \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} + \frac{400}{n^3} = 1$$

Donc par produit $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

2°) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n^3} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ $\lim_{n\to+\infty} 5n = +\infty$

donc par somme $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

3°) Pour tout n de N , $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

Donc $\sqrt{n} - 1 \leq \sqrt{n} - (-1)^n \leq \sqrt{n} + 1$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} - 1 = +\infty$ alors d'après le théorème de comparaison des limites et par minoration $\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty$

4°) On a une indéterminée « $\infty - \infty$ » . Donc on factorise par 2^n

On obtient $T_n = 2^n\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$. Comme $\frac{3}{2} > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} -\left(\frac{3}{2}\right)^n = -\infty$ soit par somme $\lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n = -\infty$. De plus 2> 1 donc $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$

et par produit $\lim_{n\to+\infty} Tn = -\infty$

5°) Pour tout n de N on a bn = -2(4)^n , 4> 1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} bn = -\infty$

Ex 3

1°) Pour tout entier naturel n de N -1 $\leq \cos(3n) \leq 1$ soit comme $n^2 + 3 > 0$

$\frac{-1}{n^2+3} \leq \frac{\cos(3n)}{n^2+3} \leq \frac{1}{n^2+3}$ Soit finalement 4 - $\frac{1}{n^2+3} \leq U_n \leq 4 + \frac{1}{n^2+3}$

2°) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 3 = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+3} = 0$ et par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 + \frac{1}{n^2+3} = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 - \frac{1}{n^2+3} = 4.$

Comme pour tout n de N , 4 - $\frac{1}{n^2+3} \leq U_n \leq 4 + \frac{1}{n^2+3}$, d'après le théorème des gendarmes

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 4$

Ex 4 (BAC 2022)

1. Au bout de 30 min, 10 % de 1 mg ont disparu : il en reste donc 0,9 mg et on donne alors 0,25 mg supplémentaires : on a donc $u_1 = 1,15$.

2. Si u_n est la quantité de médicament présente au bout de n périodes de 30 min, à la $(n+1)^e$ période 10 % auront disparu; il en restera donc $0,9u_n$ et on donne alors 0,25 mg de médicament supplémentaire; on a donc $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.

3. **a.** *Initialisation* Pour $n = 0$. On a $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,15$ Comme $1 \leq 1.15 < 5$ alors $U_0 \leq U_1 < 5$
Et Po est vraie

Hérédité :On suppose que la propriété est vraie **pour un entier n** fixé c'est-à-dire $U_n \leq U_{n+1} < 5$.

Notre objectif est de montrer qu'elle reste vraie au rang n+1 à savoir $U_{n+1} \leq U_{n+2} < 5$.
Par hypothèse de récurrence on a $U_n \leq U_{n+1} < 5$. Alors comme 0.9 >0

$0,9u_n \leqslant 0,9u_{n+1} < 0,9 \times 5$ et en ajoutant 0,25 à chaque membre : $0,9u_n + 0,25 \leqslant 0,9u_{n+1} + 0,25 < 0,9 \times 5 + 0,25$, soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 4,75 < 5$.

On a donc : $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 5$: l'encadrement est vrai au rang $(n+1)$.

Conclusion : L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n, il l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence : pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.

b. La première partie du résultat précédent montre que la suite (u_n) est croissante et la deuxième que cette suite est majorée par 5 : elle est donc convergente vers une limite $\ell \leqslant 5$.

4°) a) en utilisant la calculatrice on obtient $U_8 \approx 1.854$ donc au bout de 8 périodes

b. Comme $n = 8$,car $u_8 \approx 1,854 > 1,8$.

Le médicament est réellement efficace après 4 heures.

5°) **Pour tout entier naturel n** on a,

V_{n+1} = 2.5 - U_{n+1} = 2.5 – 0.9U_n – 0.25 = 2.25 -0.9 U_n = 0.9 ($\frac{2.25}{0.9}$ – U_n) = 0.9 (2.5– U_n) =0.9 V_n

On en déduit que **(V_n) est une suite géométrique de raison 0.9 et de premier terme V_0 =2.5- Uo=1.5 .**

b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, , $v_n = v_0 \times 0,9^n$, soit $v_n = 1,5 \times 0,9^n$, d'où puisque $u_n = 2,5 - v_n$:
Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

c. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $0,9^n < 1$, car $-1 < 0,9 < 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2,5 < 3$.
Conclusion : à aucun moment le traitement ne sera dangereux pour le patient.

Ex5

<u>1°) QCM :</u> Entourer la réponse juste (2 pts)

		A	B	C	D
1	(a_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = -6n^2 - n$. Alors …	$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -7$	$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -6$	$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
2	Une suite (b_n) converge vers 1. Il est possible que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, …	$b_n = \frac{1}{n}$	$b_n = \frac{n^2+n}{1-2n^2}$	$b_n = \frac{e^n}{e}$	$b_n = \frac{\sin(n)+n}{n}$
3	Pour tout $n \geqslant 1$, on sait que $\frac{2n-4}{n} \leqslant c_n \leqslant 2 + \frac{1}{n}$. Alors …	$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 2$	$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$
4	(e_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $e_n = \frac{n+1}{5n+2}$. Alors …	$\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0,2$	$\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0,5$	$\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = +\infty$

2°) **Dans chaque cas dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant (2 Pts)**
Une réponse sans justification ne rapportera aucun point

1 Une suite $(u_n + v_n)$ est convergente.
Affirmation : les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

2 **Affirmation** : il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 10$.

3 (u_n) est une suite convergente et n'a aucun terme nul.
Affirmation : la suite $\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$ est convergente.

4 (w_n) est une suite définie par $w_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = w_n^4 + n - 500$.
Affirmation : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

1°) Faux : par ex Un = $(-1)^n$ et Vn = $(-1)^n + \frac{1}{n+1}$

2°) Vrai : Un = n Vn = $\frac{10}{n}$

3°) Faux : par ex Un = $\frac{1}{n+1}$

4°) Vrai : $w_n \geq n - 501$ pour tout n de N car ${w_{n-1}}^4 \geq 0$ et d'après le théorèmen de comparaison des limites par minoration.