CONTROLE N°4 CORRIGE

EX 1

1°) $U_0 = 2$ $U_1 = 2 + \frac{1}{3+1} = 2,25$ $U_2 = 2 + \frac{1}{6+1} = \frac{15}{7}$

2°) a)Pour tout entier n de N:

$U_{n+1} = 2 + \frac{1}{3(n+1)+1} = 2 + \frac{1}{3n+3+1} = 2 + \frac{1}{3n+4}$

b) $U_{n+1} - U_n = 2 + \frac{1}{3n+4} - 2 - \frac{1}{3n+1} = \frac{1}{3n+4} - \frac{1}{3n+1} = \frac{3n+1-3n-4}{(3n+4)(3n+1)} = \frac{-3}{(3n+4)(3n+1)}$

c) Comme pour tout n de N $(3n+4)(3n+1) > 0$ alors $\frac{-3}{(3n+4)(3n+1)} < 0$ et $U_{n+1} - U_n < 0$

soit finalement $U_{n+1} < U_n$ pour tout n de N. La suite (Un) est strictement décroissante.

3°) Pour tout entier n de N

$U_n - 2 = \frac{1}{3n+1}$ .Or $\frac{1}{3n+1} > 0$ pour tout n de N donc $U_n - 2 > 0$ c'est-à-dire $U_n > 2$ pour tout n de N. (Un) est donc minorée par 2.

4°) (Un) est strictement décroissante et elle est minorée par 2 donc , d'après le théorème de convergence monotone , elle converge.

Ex 2

1°) $\lim_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} n + 30000 = +\infty$ donc par somme $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

2°) $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} = 0$ donc par somme $\lim_{n\to+\infty} V_n = 6$

3°) Comme 4> 1 alors $\lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et par quotient $\lim_{n\to+\infty} -\frac{10}{4^n} = 0$

donc par somme $\lim_{n\to+\infty} T_n = 2$

Ex 3

1°) Pour tout entier naturel n de N

$-1 \leq \sin(4n+2) \leq 1$ soit comme $n^3 \geq 0$

$\frac{-1}{n^3+1} \leq \frac{\sin(4n+2)}{n^3+1} \leq \frac{1}{n^3+1}$

Soit finalement $5 - \frac{1}{n^3+1} \leq U_n \leq 5 + \frac{1}{n^3+1}$

2°) $\lim_{n\to+\infty} n^3 + 1 = +\infty$ donc par quotient $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3+1} = 0$ et par somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5 + \frac{1}{n^3+1}$=5 et $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 - \frac{1}{n^3+1} = 5.$

Comme pour tout n de N , 5 - $\frac{1}{n^3+1}$ $\leq$ $U_n \leq 5 + \frac{1}{n^3+1}$, d'après le théorème des gendarmes

$\lim\limits_{n\to+\infty}$ U_n =5

Ex 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1. • $u_1 = 0,95 \times u_0 + 200 = 0,95 \times 10000 + 200 = 9500 + 200 = 9700.$
   • $u_2 = 0,95 \times u_1 + 200 = 0,95 \times 9700 + 200 = 9215 + 200 = 9415.$
2. **a.** On démontre par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n > 4000$.
   Initialisation: $u_0 = 10000 > 4000$: l'inégalité est vraie au rang 0;
   Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n > 4000$, alors par produit par $0,95 > 0$, on a $0,95u_n > 0,95 \times 4000$, soit :
   $0,95u_n > 3800$, et en ajoutant 200 à chaque membre :
   $0,95u_n + 200 > 3800 + 200$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 4000$: la relation est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $u_n > 4000$ quel que soit le naturel n.

   b. On sait que si la suite est décroissante et minorée par 4000, elle converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 4000$.
3. **a.** Pour $n = 0$, on a $v_0 = u_0 - 4000 = 10000 - 4000 = 6000.$

b. On sait que si la suite est décroissante et minorée par 4 000, elle converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 4000$.

3. **a.** Pour $n = 0$, on a $v_0 = u_0 - 4000 = 10000 - 4000 = 6000$.

b. Au choix :

Méthode 1 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$v_{n+1} = u_{n+1} - 4000 = 0,95u_n + 200 - 4000 = 0,95u_n - 3800 = 0,95\left(u_n - \dfrac{3800}{0,95}\right) =$
$0,95\,(u_n - 4000) = 0,95v_n$.

L'égalité $v_{n+1} = 0,95v_n$ vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

Méthode 2 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a vu que $u_n > 4000$, donc $v_n = u_n - 4000 > 0$.

On peut donc calculer : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1} - 4000}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95u_n + 200 - 4000}{u_n - 4000} =$
$\dfrac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95\left(u_n - \frac{3800}{0,95}\right)}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95\,(u_n - 4000)}{u_n - 4000} = 0,95$.

Cette égalité vraie pour tout naturel n, montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

c. D'après le résultat précédent, on sait que que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$v_n = v_0 \times 0,95^n = 6000 \times 0,95^n$.
Or $v_n = u_n - 4000 \iff u_n = v_n + 4000 = 6000 \times 0,95^n + 4000$.

d. Comme $0 < 0,95 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 6000 \times 0,95^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4000$ (par somme de limites).

4. u_n est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang n; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de 4 000 soit moins de la moitié de la population initiale : le responsable a raison.

Ex 5

1°) QCM : Entourer la réponse juste.(2 pts)

❶ Lorsque x tend vers $+\infty$, la limite de $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x}$ est :

a 1.

b une forme indéterminée.

c 0.

❷ La limite de $g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à :

a $+\infty$ b $-\infty$ c 0

❸ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ est :

a $+\infty$.

b une forme indéterminée.

c 0.

❹ Lorsque x tend vers $+\infty$, la limite de $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$ est :

a 1.

b $+\infty$.

c une forme indéterminée.

❺ Lorsque x tend vers -1 avec $x < -1$, la limite de $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ est :

a 2 b $+\infty$ c $-\infty$

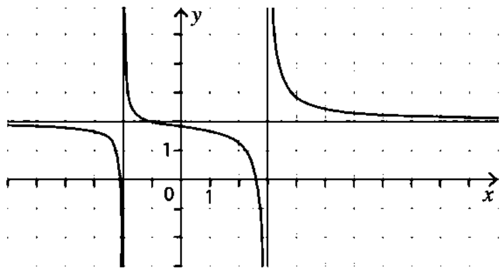
❻ La limite de $f(x) = \cos\left(\frac{x^2-10}{2x^4+7x+2}\right)$ en $+\infty$:

a Une forme indéterminée

b $-\infty$

c 1

❼ La fonction f est donnée par la courbe ci-dessous.



a La droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe représentative de f.

b La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à la courbe représentative de f.

c La droite d'équation $x = 3$ est asymptote à la courbe représentative de f.

2°) Vrai /Faux : Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse. (3 pts)

1- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Affirmation : Si, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \leqslant f(x)$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2- Soit a un nombre réel. Soient g une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ et h une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = +\infty$.

Affirmation : On a $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$.

3- La fonction f, définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = -5 + \frac{1}{x} + \cos(x)$$
est encadrée par les fonctions $g(x) = -6 + \frac{1}{x}$ et $h(x) = -4 + \frac{1}{x}$.

Affirmation : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -5$

1-Vrai d'après le théorème de comparaison des limites par minoration

2- Faux , ex g(x) = $\frac{1}{(x-a)^2}$ h(x) = $\frac{1}{(x-a)^4}$

3- Faux la limite de f est comprise entre -6 et -4.