CONTROLE N°1 TRIMESTRE 3 TS2

EX1 (3 points)

Soit f la fonction définie sur I = $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{x^2+9x+21}{(x+4)^2}$.

1°) Pour tout x de I,

$1+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{(x+4)^2} = \frac{(x+4)^2}{(x+4)^2}+\frac{(x+4)}{(x+4)^2}+\frac{1}{(x+4)^2} = \frac{x^2+8x+16+x+4+1}{(x+4)^2} = \frac{x^2+9x+21}{(x+4)^2} = f(x)$

2°) $J = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 1+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{(x+4)^2}\,dx = \left[x+ln|x+4|-\frac{1}{x+4}\right]_0^2$

$J = (2+\ln 6-\frac{1}{6}) - (\ln 4 - \frac{1}{4}) = \frac{25}{12} + \ln\frac{3}{2}$

EX 2

Partie A

1°) $g(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right)$. Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty.\ d'après\ le\ cours$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ donc

Par somme $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{x}\right) = +\infty$ puis par produit $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2°) $g'(x) = e^x - 1$. Comme $x \geq 0$ alors $e^x \geq e^0$, soit $e^x \geq 1$ soit encore, $e^x - 1 \geq 0$. On den déduit le tableau de variation de g sur I :

x	0	$+\infty$
g'(x)	+	
g(x)	0	$+\infty$

3°) D'après le tableau de variation de g , 0 est le minimum de g sur $\mathbb{R}^+$ donc $g(x)\geq 0$ pour tout réel positif.

Partie B

1°) f est une primitive sur R+ de la fonction $t \to \frac{e^t}{t+1}$ continue sur $\mathbb{R}^+$ donc dérivable et ainsi f est continue sur R+ .

2°) a) $f'(x) = \frac{e^x}{x+1}$

b) Comme $e^x > 0$ pour tout réel x ; de plus $x + 1 > 0$ pour tout réel x donc $f' > 0$ sur $\mathbb{R}^+$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

3°) a) $f(1) = -1 + \int_1^1 \frac{e^t}{t+1}\,dt. = -1 + 0 = -1$

b) D'après le 3°) A on sait que g(t)≥0 pour tout réel t positif donc $e^t \geq t+1$ soit $\frac{e^t}{t+1} \geq 1$ pour tout réel t positif . On en déduit par positivité de l'intégrale que

$\int_1^2 \frac{e^t}{t+1}\, dt \geq \int_1^2 dt$

soit $\int_1^2 \frac{e^t}{t+1}\, dt \geq [t]_1^2$ soit finalement $\int_1^2 \frac{e^t}{t+1}\, dt \geq 1$ et $-1 + \int_1^2 \frac{e^t}{t+1}\, dt \geq 0$ c'est-à-dire $f(2) \geq 0$.

c) f est continue et strictement croissante sur R^+ donc elle est continue et strictement croissante sur $[1; 2]$ à valeurs dans $[-1; f(2)]$ qui contient 0 puisque $f(2) \geq 0$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires relatif aux fonctions strictement monotones l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1; 2]$.

Remarque : en fait $f(2) > 0$ car $e^t > t+1$ soit $\frac{e^t}{t+1} > 1$ pour tout réel $t > 0$. On en déduit par positivité de l'intégrale que $\int_1^2 \frac{e^t}{t+1}\, dt > 1$ soit $f(2) > 0$.

EX 3

1) En raison de la propriété de linéarité de l'intégrale, nous pouvons écrire :

$$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1+e^x}{1+e^x} dx = \int_0^1 1 dx = 1$$

Pour intégrer I_1, nous devons trouver une primitive d'une fonction de type $\frac{u'(x)}{u(x)}$. Donc cette primitive est une fonction composée d'une fonction logarithme.

$$I_1 = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(1+e^0) = \ln \frac{1+e}{2}$$

Si nous connaissons $I_0 + I_1$ et I_1, il est facile de déterminer I_0 par différence.

$$I_0 = 1 - \ln \frac{1+e}{2}$$

$$\Leftrightarrow I_0 = \ln e - \ln(1+e) + \ln 2$$

$$\Leftrightarrow I_0 = \ln \frac{2e}{1+e}$$

2) Pour tout entier naturel n...

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nx} + e^{(n+1)x}}{1+e^x} dx$$

Factorisons par e^{nx}.

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nx}(1+e^x)}{1+e^x} dx$$

$$\Leftrightarrow I_n + I_{n+1} = \int_0^1 e^{nx} dx$$

Pour tout $n \neq 0$, une primitive de e^{nx} est $\frac{e^{nx}}{n}$.

$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}[e^{nx}]_0^1 = \frac{e^n - 1}{n}$

Nous trouverons encore les valeurs de I par différence. En effet, en remplaçant n par 1 il apparaît que $I_2 + I_1 = e - 1$. Donc $I_2 = e - 1 - \ln \frac{1+e}{2}$

Et en remplaçant n par 2, $I_2 + I_3 = \frac{e^2-1}{2}$

Là encore, par différence $I_3 = \frac{e^2-1}{2} - e + 1 + \ln \frac{1+e}{2}$

On peut chercher une écriture plus élégante.

$I_3 = \frac{(e-1)(e+1)-2(e-1)}{2} + \ln \frac{1+e}{2}$

En factorisant le numérateur du premier terme par $(e-1)$ nous obtenons :

$I_3 = \frac{(e-1)^2}{2} + \ln \frac{1+e}{2}$

3) La fonction exponentielle étant strictement croissante, nous avons, pour tout entier naturel n et pour tout réel x compris entre 0 et 1 : $e^{nx} \leqslant e^{(n+1)x}$

Note : l'inégalité est large car si $x = 0$ il y a égalité.

$$\frac{e^{nx}}{1+e^x} \leqslant \frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x}$$

Donc, sur l'intervalle $[0\,;1]$, $I_n \leqslant I_{n+1}$.

4) Comme $x \in [0\,;1]$, nous avons $2 \leqslant 1 + e^x \leqslant 1 + e$.

$\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{1+e^x} \leqslant \frac{1}{2}$

Note : la première inégalité est en fait stricte mais nous nous conformons à l'énoncé.

Multiplions les membres par e^{nx}.

$\frac{e^{nx}}{4} \leqslant \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leqslant \frac{e^{nx}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\int_0^1 e^{nx} dx \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 e^{nx} dx$

Nous avons déjà déterminé cette intégrale à la question 2. Pour tout $n > 0 \ldots$

$\frac{e^n-1}{4n} \leqslant I_n \leqslant \frac{e^n-1}{2n}$

En nous référant aux limites de fonctions exponentielles et aux propriétés des limites de suites :

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^n-1}{4n} = +\infty$ **donc** $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = +\infty$ <= attention Correction non détaillée