<u>CONTROLE N°1 DE MATHEMATIQUES TRIMESTRE 3 . DUREE : 4H</u>

<u>EXERCICE 1(5 points)</u>

Le virus d'une grippe appelée alpha atteint chaque année, sur une période de trois mois, entre décembre et février, une partie de la population d'une région.
La vaccination contre le virus est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

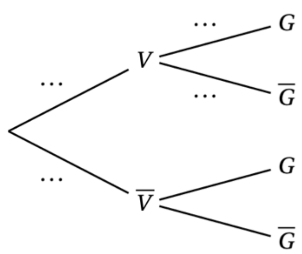
L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné. Une étude menée dans la population de la région à l'issue de la période des trois mois a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la région et on considère les évènements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;
G : « la personne a contracté la grippe ».

1. a. Donner la probabilité de l'évènement G.
   b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.
3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0, 28.

Partie B

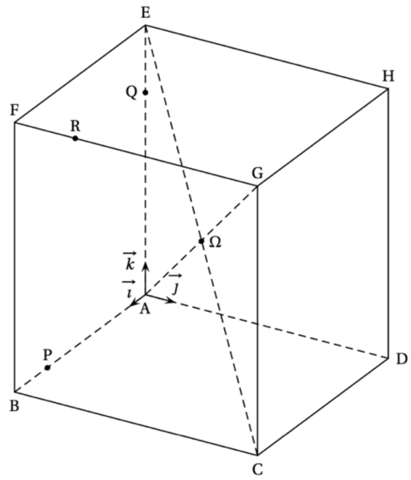
Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette région. Après la période hivernale, on interroge au hasard 100 habitants de la région, en admettant que ce choix se ramène à 100 tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la région soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les 100 personnes interrogées.

1. En justifiant, dire quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 30 des 100 personnes interrogées soient vaccinées.
3. Peut-on être sûr au seuil de 99% qu'il y aura au plus 55 des 100 personnes interrogées qui seront vaccinées.
4. a. Déterminer le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$
   b. On admet que $P(X \leq 31) > 0{,}025$. En déduire alors l'intervalle I tel que $P(X \in \boldsymbol{I}) \geq \mathbf{0,95}$

EXERCICE 2(5 points)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 8 cm et de centre Ω.
Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ avec : $\vec{\imath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.



Partie I

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont $(8;2;8)$.
   Donner les coordonnées des points P et Q.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(1\,;\,-5\,;\,1)$ est un vecteur normal au plan (PQR).
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x-5y+z-6=0$.

Partie II

On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont $(4;4;4)$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω.
3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{14}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{14}{3}\right)$
4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).
5. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point R et orthogonal à la droite (QH), et on appelle K le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (QH). Ainsi, K est le projeté orthogonal de R sur la droite (QH).

   a. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne : $4y + z - 16 = 0$.
   b. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (QH) est

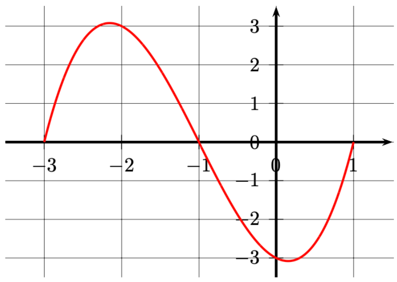
   $$\begin{cases} x = 0 \\ y = 8t \\ z = 6 + 2t \end{cases}\quad , t \in R\,.$$

   En déduire que le point K a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{40}{17}\ ;\ \frac{112}{17}\right)$
   c. Calculer la longueur RK. On donnera une valeur exacte.

EXERCICE 3 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3; 1]$.On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée seconde f''. On peut alors affirmer que :



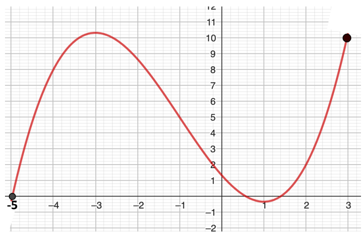
   a. La fonction f est concave sur l'intervalle $[-2 ; 1]$.
   b. La fonction f' est décroissante sur l'intervalle $[-2{,}2 ; 0{,}2]$
   c. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3 ; -1]$
   d. La fonction f est négative sur l'intervalle $[-1 ; 1]$

2. On considère la fonction f est définie sur $]-2 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{x^3+8}$
   Une primitive F de la fonction f est :

   a. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^3+8)$ b. $F(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x^3+8}\right)$

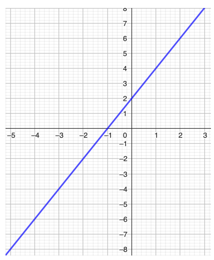
   c. $F(x) = \frac{1}{3}\ln(x^3+8)$ d. $F(x) = \ln\left(\frac{2x}{3x^2+8}\right)$

3. Dans un repère, on a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-5 ; 3]$

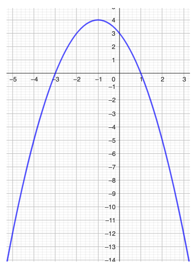


Parmi les courbes suivantes, laquelle représente la fonction f'', dérivée seconde de f ?

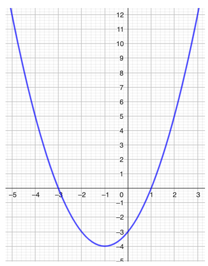
a.



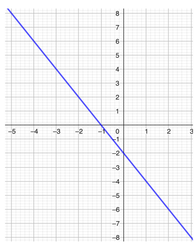
b.



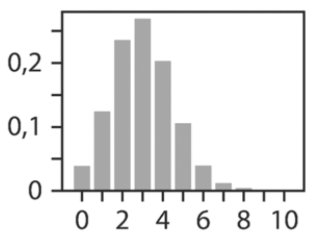
c.



d.



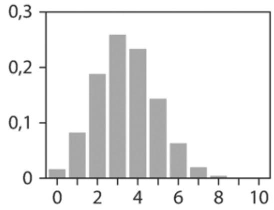
4. On considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale representée par le diagramme en barres ci-dessous. Quelle est son espérance ?



a. 8 b. 3

c. 0,26 d. 10

5. On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale B(10 ; p) représentée par le diagramme en barres ci-dessous. Quelle est la valeur de p ?



a. 0,03 b. 0,330

c. 0,003 d. 0,3

EXERCICE 4(6 points)

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle]0 ; +∞[par :

$$f(x) = x - \frac{lnx}{x^2} \qquad g(x) = 1 + \frac{2lnx-1}{x^3}$$

Partie I

1. Déterminer la limite de la fonction g en 0.

2. a. En remarquant que $g(x) = 1 + \frac{2lnx}{x^3} - \frac{1}{x^3}$ montrer que la courbe de la fonction g que l'on appelle Cg admet la droite Δ d'équation y=1 comme asymptote horizontale au voisinage de +∞.

b. Étudier la position relative de Δ et de Cg sur]0 ; +∞[.

3. On admet que g est dérivable sur]0;+∞[et on notera g' sa fonction dérivée.

a. Démontrer que pour tout réel x strictement positif : $g'(x) = \frac{-6lnx+5}{x^4}$

b. Donner le tableau de variations de la fonction g sur]0 ; +∞[.

4. Calculer g(1) puis déduire de ce qui précède le signe de la fonction g sur]0 ; +∞ [

Partie II

1. Démontrer que sur l'intervalle]0; +∞[, la fonction f est une primitive de la fonction g.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On admet que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Après avoir montré que $f'(x) = g(x)$, étudier les variations de la fonction f, *à* l'aide de la partie I.

4. Résoudre dans l'intervalle]0; +∞[l'équation $f(x) = x$.

Partie III

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par:

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de u_1 et u_2.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
4. a. Expliquer le rôle du programme écrit ci-dessous en langage python .

```
from math import*
n=0
u=5
while u>=1.01:
    n=n+1
    u=u-log(u)/u**2
print(u,n)
```

b. Donner les résultats obtenus à la fin du programme.