CONTROLE N°1 DE MATHEMATIQUES TRIMESTRE 3 . SUJET RATTRAPAGE. DUREE : 4H

EXERCICE 1(5 points)

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.
On note S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » et M l'événement «le voyageur porte un objet métallique .»

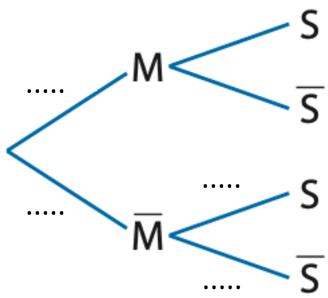
On admet que :

- 0.2 % des voyageurs portent un objet métallique
- 98 % des personnes qui n'ont pas d'objet métallique ne font pas sonner le portique
- 2,195 % des voyageurs font sonner le portique

Partie A

1.a. Donner la probabilité de l'événement S

b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que le voyageur n'ait pas d'objet métallique et fasse sonner le portique.
3. Montrer que la probabilité que le voyageur fasse sonner le portique sachant qu'il a un objet métallique est 0,995.

Partie B

400 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que, pour chaque personne, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,02195. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique parmi les 400 personnes de ce groupe.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Déterminer la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

3. Peut-on être sûr au seuil de 99% qu'il y aura au plus 15 des 400 personnes de ce groupe qui feront sonner le portique.

4. a. Déterminer le plus petit entier b tel que $P (X \leq b) \geq 0,975$

b. On admet 4 est le plus petit entier tel que $P(X\leq 4) > 0.025$.
En déduire alors l'intervalle I tel que $P(X \in \boldsymbol{I}) \geq \mathbf{0,95}$

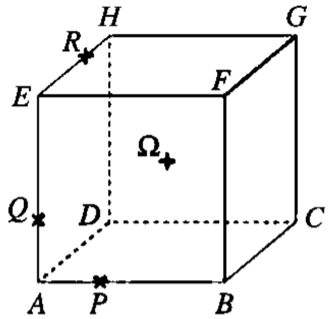
EXERCICE 2(5 points)

Dans l'espace, on considère un cube $ABCDEFGH$ de centre Ω et d'arête de longueur 6.

On se place dans le repère

(A ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) où

$\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ $\vec{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}$



Les points P, Q et R sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{HR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}.$$

Dans ce repère, on a par exemple :

$B(6;0;0)$, $F(6;0;6)$ et $R(0;4;6)$.

1. a. Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω.

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est

un vecteur normal au plan (PQR).

c. En déduire qu'une équation du plan (PQR) est :

$$x - y + z - 2 = 0.$$

2. a. On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω, centre du cube.

Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. En déduire que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point I de coordonnées $\left(\frac{8}{3};\frac{10}{3};\frac{8}{3}\right)$.

c. Calculer la distance ΩI.

3. On considère les points $J(6;4;0)$ et $K(6;6;2)$.

a. Justifier que le point J appartient au plan (PQR).

b. Vérifier que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

4. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point R et orthogonal à la droite (QD), et on appelle a.K le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (QD). Ainsi, K est le projeté orthogonal de R sur la droite (QD).On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (QD) est

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad , t \in R .$$

et que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne : y – 2 z + 8 = 0

En déduire que le point K a pour coordonnées $\left(0 ; -\frac{4}{5} ; \frac{18}{5}\right)$

b. Calculer la longueur RK.

EXERCICE 3 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction g définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right).$$

Pour tout nombre réel x strictement positif :

a. $g'(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ **b.** $g'(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$

c. $g'(x) = \ln(2x+1)$ **d.** $g'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

2. La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ admet pour primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ la fonction :

a. $x \longmapsto \ln(x)$ **b.** $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ **c.** $x \longmapsto x\ln(x) - x$ **d.** $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

3.

. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2\,;\,2]$. Le tableau de variations de la fonction f' dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,2]$ est donné par :

x	-2		-1		0		2
variations de f'	1	↘	0	↘	-2	↗	-1

La fonction f est :

a. convexe sur $[-2\,;\,-1]$ **b.** concave sur $[0\,;1]$

c. convexe sur $[-1\,;\,2]$ **d.** concave sur $[-2\,;\,0]$

4. Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac.
La probabilité de tirer exactement 2 jetons jaunes, arrondie au milllième, est :

a. 0,683 **b.** 0,346 **c.** 0,230 **d.** 0,165

5.

Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus.
On réalise l'expérience aléatoire suivante : on tire successivement et avec remise cinq jetons du sac.
On note le nombre de jetons jaunes obtenus après ces cinq tirages.
Si on répète cette expérience aléatoire un très grand nombre de fois alors, en moyenne, le nombre de jetons jaunes est égal à :

a. 0,4 **b.** 1,2 **c.** 2 **d.** 2,5

EXERCICE 4(6 points)

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle]1 ; +∞[par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x-1)}{x-1} \qquad g(x) = \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

Partie I

1. Déterminer la limite de la fonction g en 1.

2. a. Montrer que la courbe de la fonction g que l'on appelle Cg admet la droite Δ d'équation y=1 comme asymptote horizontale au voisinage de +∞.

b. On considère pour tout $x>1$, h(x) = g(x) – 1 . Vérifier que h (x) = $\frac{\ln(x-1)-1}{(x-1)^2}$ puis étudier la position relative de Δ et de Cg sur]1 ; +∞[.

3. On admet que g est dérivable sur]1;+∞[et on notera g' sa fonction dérivée.

a. Démontrer que pour tout réel $x > 1$: $g'(x) = \frac{3-2\ln(x-1)}{(x-1)^3}$

b. Donner le tableau de variations de la fonction g sur]1 ; +∞[.

4. Calculer g(2) puis déduire de ce qui précède le signe de la fonction g sur]1 ; +∞ [

Partie II

1. Démontrer que sur l'intervalle] 1; +∞[, la fonction f est une primitive de la fonction g.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$. Après avoir montré que $f'(x) = g(x)$, étudier les variations de la fonction f, *à* l'aide de la partie I.
4. Résoudre dans l'intervalle] 1; +∞[l'équation $f(x) = x$.

Partie III

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par:

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de u_1 et u_2.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
4. a. Expliquer le rôle du programme écrit ci-dessous en langage python.

```
from math import*
n=0
u=5
while u>=2.001:
      n=n+1
      u=u-log(u-1)/(u-1)**2
print(u,n)
```

b. Donner les résultats obtenus à la fin du programme.