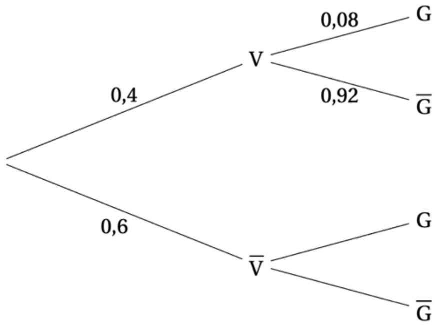
CONTROLE N°1 DE MATHEMATIQUES TRIMESTRE 3 . DUREE : 4H CORRIGE

EXERCICE 1(5 points)

Partie A

1. **a.** P(G) = 0,2 car 20% de la population a contracté la grippe.
   b. On obtient :



2. On calcule $P(G \cap V) = 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}032$ soit 3,2% de chances que la personne ait contractée la grippe et soit vaccinée.

3. On calcule $P_{\overline{V}}(G) = \dfrac{P(\overline{V} \cap G)}{P\left(\overline{V}\right)}$

   D'après la formule des probabilités totales, $P(V \cap G) + P\left(\overline{V} \cap G\right) = P(G)$

   donc $P\left(\overline{V} \cap G\right) = P(G) - P(V \cap G) = 0{,}2 - 0{,}032 = 0{,}168$ puis $P_{\overline{V}}(G) = \dfrac{0{,}168}{0{,}6} = 0{,}28$.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*

1.On a une succession de 100 épreuves indépendantes (« tirages successifs indépendants et avec remise») et identiques avec deux issues possibles, un succès, de probabilité p=0.4 (« la personne est vaccinée ») ou un échec (« La personne n'est pas vaccinée »), de probabilité 1-p=0,6 . On a donc la répétition 100 fois d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p=0.4, c'est un schéma de Bernoulli de paramètres 100 et 0.4. On en déduit que X, la variable aléatoire associée à ce schéma de Bernoulli qui donne le nombre de succès, à savoir le nombre de personnes vaccinées parmi les 100 personnes interrogées**,** suit la loi binomiale B(100 ;0.4)

2. On doit calculer $P(X = 30)$. La calculatrice donne $P(X = 30) \approx 0.010$.

3. On cherche $P (X \leq 55)$. La calculatrice donne $P(X \leq 55) \approx 0,999$. Comme 0.999> 0,99, oui on peut en être sûr.

4. a. D'après la calculatrice $P (X \leq 50) \approx 0,983$ et $P (X \leq 49) \approx 0,973$ donc b = 50.
   b. On admet que $P(X\leq 31) > 0,025$ donc I = [31; 50]

car $P(31 \leq X \leq 50)= P(X \leq 50) - P (X < 31)= P(X \leq 50) -P(X \leq 30)$
Or $P(X \leq 30) \leq 0.025$ d'où $-P(X \leq 30) \geq - 0.025$ et on a $P(31 \leq X \leq 50) \geq 0.975 - 0.025$ soit $P(31 \leq X \leq 50) \geq 0.95$

EXERCICE 2(5 points)

Partie I

1. On a P(6; 0; 0) et Q(0; 0; 6).

2. On a $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix}$.

   ✦ $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PQ} = -6+0+6 = 0$: les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont orthogonaux;

   ✦ $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PR} = 2-10+8 = 0$: les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont orthogonaux.

   Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan PQR est normal à ce plan.

3. D'après le résultat précédent :
   $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{PQR}) \iff 1x-5y+1z+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$.
   Or $\text{P}(6;0;0)\in(\text{PQR}) \iff 1\times6-5\times0+1\times0+d=0 \iff d=-6$.
   Donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(\text{PQR}) \iff x-5y+z-6=0$.

Partie II

1. ✦ Les plans (ABCD) et (EFGH) sont parallèles, donc les droites (AC) et (EG) sont parallèles;

   ✦ Les droites (AE) et (CG) sont perpendiculaires au plan (ABCD), elles sont donc parallèles.

   Le quadrilatère (AEGC) a ses côtés opposés parallèles; c'est donc un parallélogramme; ses diagonales [AG] et [CE] ont donc le même milieu Ω.

   Comme G(8; 8; 8), les coordonnées de Ω sont donc $\left(\dfrac{0+8}{2}\ ;\ \dfrac{0+8}{2}\ ;\ \dfrac{0+8}{2}\right) = (4\ ;\ 4\ ;\ 4)$.

2. La droite (d) a donc pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ et contient Ω, donc :
   $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(d) \iff \overrightarrow{\Omega M} = t\,\overrightarrow{n}$, avec $t\in\mathbb{R}$, soit :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x-4 &=& t\times1\\ y-4 &=& t\times(-5)\\ z-4 &=& t\times1\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4+t\\ y &=& 4-5t\\ z &=& 4+t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

3. L est le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR) donc la droite (ΩL) est perpendiculaire au plan (PQR), c'est donc la droite (d).
   L est donc le point commun au plan (PQR) et à la droite (d), ses coordonnées vérifient donc le système :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4+t\\ y &=& 4-5t\\ z &=& 4+t\\ x-5y+z-6 &=& 0\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} x-5y+z-6=0 &\iff 4+t-5(4-5t)+4+t-6=0 \\ &\iff 2+2t-20+25t=0 \\ &\iff 27t=18 \\ &\iff 9\times 3t=9\times 2 \\ &\iff 3t=2 \\ &\iff t=\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

En reportant cette valeur de t dans les trois premières équations du système, on trouve que $L\left(\frac{14}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{14}{3}\right)$.

4. Puisque L est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (PQR), la distance de Ω à ce plan est la distance ΩL; or :

$$\begin{aligned} \Omega L^2 &= \left(\frac{14}{3}-4\right)^2+\left(\frac{2}{3}-4\right)^2+\left(\frac{14}{3}-4\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{10}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{4+100+4}{9} \\ &= \frac{108}{9} \\ &= 12. \end{aligned}$$

On a donc $\Omega L=\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}$.

5.a. $\mathscr{P}$ le plan passant par le point R et orthogonal à la droite (QH),

Donc $\overrightarrow{QH}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$

$\overrightarrow{QH}\begin{pmatrix}0-0\\8-0\\8-6\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{QH}\begin{pmatrix}0\\8\\2\end{pmatrix}$ donc $\mathscr{P}$: 8y +2z +d = 0

Comme R(8 ; 2 ; 8) ϵ $\mathscr{P}$ on a 8.2 + 2.8 + d = 0 soit d = -32 et $\mathscr{P}$: 8y +2z – 32 = 0 ce qui est équivalent à $\mathscr{P}$: 4y +z – 16 = 0

b. K(x ; y ; z) ϵ (QH) $\cap$ $\mathscr{P}$ ssi

$$\begin{cases} x=0 \\ y=8t \\ z=6+2t \\ 4y+z-16=0 \end{cases}$$

Ce qui donne 4(8t) + 6 + 2t - 16 = 0 soit 32t + 2t – 10 = 0 34t =10 soit t = $\frac{5}{17}$

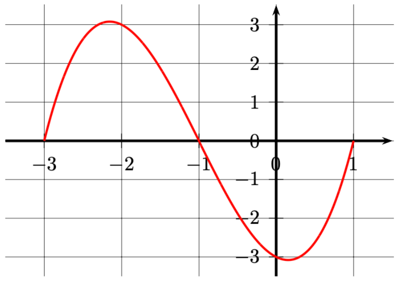
Et En déduire que le point K a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{40}{17}\ ;\ \frac{112}{17}\right)$

c. RK = $\sqrt{(8)^2+\left(\frac{6}{17}\right)^2+\left(\frac{24}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{1124}{17}}$

EXERCICE 3 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3; 1]$.On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée seconde f''. On peut alors affirmer que :



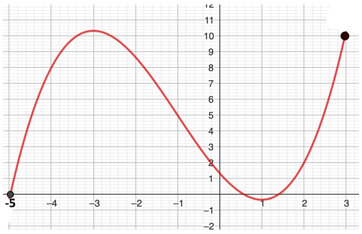
   a. La fonction f est concave sur l'intervalle $[-2\,;1]$.
   b. La fonction f' est décroissante sur l'intervalle $[-2{,}2\,;0{,}2]$
   c. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3\,;-1]$
   d. La fonction f est négative sur l'intervalle $[-1\,;1]$

2. On considère la fonction f est définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{x^3+8}$
   Une primitive F de la fonction f est :

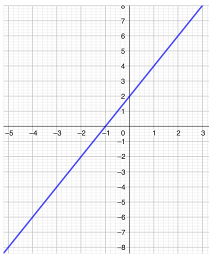
   a. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^3+8)$ b. $F(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x^3+8}\right)$

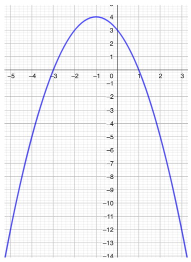
   c. $F(x) = \frac{1}{3}\ln(x^3+8)$ d. $F(x) = \ln\left(\frac{2x}{3x^2+8}\right)$

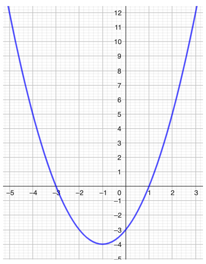
3. Dans un repère, on a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-5\,;\,3\,]$

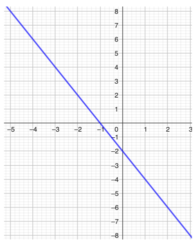


Parmi les courbes suivantes, laquelle représente la fonction f'', dérivée seconde de f ?

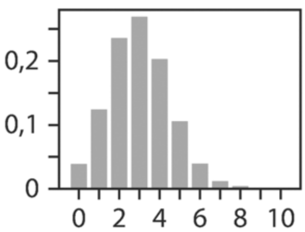
a.


b.


c.


d.


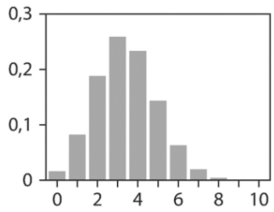
4. On considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale representée par le diagramme en barres ci-dessous. Quelle est son espérance ?



a. 8 b. 3

c. 0,26 d. 10

5. On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale B(10 ; p) représentée par le diagramme en barres ci-dessous. Quelle est la valeur de p ?



a. 0,03 b. 0,330

c. 0,003 d. 0,3

EXERCICE 4(6 points)

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle]0 ; +∞[par :

$$f(x) = x - \frac{lnx}{x^2} \qquad g(x) = 1 + \frac{2lnx-1}{x^3}$$

Partie I

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} lnx$ = -∞ donc par produit puis par somme

$\lim\limits_{x\to 0} 2lnx - 1$ = -∞

Et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0^+$

Donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2lnx-1}{x^3}$ = -∞

Finalement par somme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ = -∞

2. a. $g(x) = 1 + \frac{2lnx}{x^3} - \frac{1}{x^3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^3} = 0$ par croissance comparée donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2lnx}{x^3} = 0$

Et

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

donc par somme

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$

Donc la droite Δ : y=1 est bien asymptote horizontale à Cg au voisinage de +∞.

b. Pour étudier la position relative de Δ et de Cg sur]0 ; +∞[on va étudier le signe

de h(x) = g(x) – 1 = $1 + \frac{2lnx-1}{x^3} - 1 = \frac{2lnx-1}{x^3}$

Comme $x > 0$, alors $x^3 > 0$ et h(x) est du signe de $2lnx - 1$. Or $2\ln x - 1 \geq 0$ équivaut à $\ln x > \frac{1}{2}$ soit à $\ln x > \ln\sqrt{e}$ c'est-à-dire $x > \sqrt{e}$. De même $2\ln x - 1 \leq 0$ si $0 < x < \sqrt{e}$

donc h(x) > 0 si $x \in \left]\sqrt{e}\,;+\infty\right[$

h(x) < 0 si $x \in \left]0\,;\sqrt{e}\right[$

h(x) = 0 si $x = \sqrt{e}$

On en déduit que Cg est au-dessus de Δ sur $\left]\sqrt{e}\,;+\infty\right[$, Cg est en-dessous de Δ sur $\left]0\,;\sqrt{e}\right[$

Et Cg coupe Δ en $x = \sqrt{e}$

3.

a. Pour tout réel x strictement positif :

u(x) = $2lnx - 1$ u'(x) = $\frac{2}{x}$

v(x) = x^3 v'(x) = $3x^2$

on applique la formule ($\frac{u}{v}$)' = $\frac{u'v-uv'}{v^2}$

d'où

$g'(x) = \frac{2x^2-3x^2\ (2lnx-1)}{x^6} = \frac{x^2(\,2-6lnx+3)}{x^6} = \frac{-6lnx+5}{x^4}$

b. Comme $x^4 > 0$ pour tout x de]0 ; +∞[alors $g'(x)$ est du signe de $-6lnx + 5$.

Or -6ln$x$ + 5 $\geq$ 0 équivaut

à ln$x$ $\leq \frac{5}{6}$ soit à ln$x$ ≤ ln $e^{\frac{5}{6}}$ c'est-à-dire $x \leq e^{\frac{5}{6}}$

On en déduit le tableau de variation de g sur]0 ; +∞[

x	0		$e^{\frac{5}{6}}$		+∞
g'(x)	‖	+	0	-	
g(x)	‖ -∞	↗		↘	1

g($e^{\frac{5}{6}}$) = $1 + \frac{2lne^{\frac{5}{6}}-1}{e^{\frac{5}{2}}} = 1 + \frac{2}{3}\ e^{-\frac{5}{2}}$

3. on a g(1) = 0 donc d'après le tableau de variation de g on a

x	0		1		+∞
Signe de g(x)	‖	-	0	+	

Partie II

1.

Pour tout réel x strictement positif :

u(x) = $\ln x$ u'(x) = $\frac{1}{x}$

v(x) = x^2 v'(x) = $2x$

on applique la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ et (u + v) ' = u' + v'

d'où

$f'(x) = 1 - \frac{x-2x\ln x}{x^4} = 1 - \frac{1-2\ln x}{x^3} = 1 + \frac{2\ln x - 1}{x^3} = g(x)$

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissance comparée

Et

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Comme $f'(x) = g(x)$ alors $f'(x)$ est du signe de g(x) pour tout x de]0 ; +∞[et on en déduit le tableau de variation de f sur]0 ; +∞[

x	0		1		+∞
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	+∞	↘	1	↗	+∞

4. Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$.

Pour tout $x > 0$

$f(x) = x$ *équivaut* à $x - \frac{lnx}{x^2} = x$ soit à $\frac{lnx}{x^2} = 0$ soit finalement à $\ln x = 0$

Qui équivaut à $x = 1$.

$$S = \{1\}$$

Partie III

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par tout entier naturel *n* :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. $u_1 \approx 4.94$ et $u_2 \approx 4.87$

2. $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

Initialisation : pour n=0 on a $U_0 = 5$ et $u_1 \approx 4.94$

$1 \leq 4.94 \leq 5$ donc $1 \leq u_{0+1} \leq u_0$ et P_0 est vraie

Hérédité : On suppose que la propriété est vraie **pour un entier n** fixé c'est-à-dire $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$. Notre objectif est de montrer qu'elle reste vraie au rang n+1 à savoir

$1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

Par hypothèse de récurrence on a $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

donc , comme la fonction *f* est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ alors

$$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

soit encore

$$1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

et la propriété est vraie au rang n+1.

Conclusion : P_n est vraie au rang 0, elle est héréditaire, on a démontré par récurrence que **pour tout entier naturel n,** $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

D ’après le 2) pour tout n de N, $u_{n+1} \leq u_n$ et $u_n \geq 1$
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc d’après le théorème de convergence des suites monotones (u_n) converge vers une limite L.

De plus f est continue sur]0; +∞[donc d’après le théorème du point fixe la limite L vérifie l’équation $f(x) = x$. D’après précédemment la seule solution sur]0; +∞[est 1 donc L = 1.

4. a. Le programme permet de déterminer le rang à partir $u_n < 1.01$ et la valeur du terme u_n à ce rang .

b. On trouve n = 38 et $u_n \approx 1.0008$.