CONTROLE N°1 CORRIGE

EX 1

1°) $U_0 = -2 \quad U_1 = 1 \quad U_2 = 8/5$

2°) a)Pour tout entier n de N:

$U_{n+1} - U_n = \frac{5n+3}{2n+3} - \frac{5n-2}{2n+1} = \frac{(5n+3)(2n+1)-(2n+3)(5n-2)}{(2n+3)(\,2n+1)} = \frac{10n^2+11n+3-10n^2-11n+6}{(2n+3)(\,2n+1)} = \frac{9}{(2n+3)(\,2n+1)}$

b) Comme $\frac{9}{(2n+3)(\,2n+1)} > 0$ pour tout entier n de N alors $U_{n+1} - U_n > 0$ pour tout entier n de N. On en déduit que la suite est strictement croissante .

3°) Pour tout entier n de N

$U_n - \frac{5}{2} = \frac{5n-2}{2n+1} - \frac{5}{2} = \frac{(2)(5n-2)-(2n+1)(5)}{2(\,2n+1)} = \frac{-9}{2(\,2n+1)}$

Soit $U_n - \frac{5}{2} < 0$ pour tout entier n de N càd $U_n < \frac{5}{2}$ pour tout n de N et (U_n) est majorée par 5/2.

4°) (U_n) est strictement croissante et elle est majorée par $\frac{5}{2}$ donc , d'après le théorème de convergence monotone , elle converge.

Ex 2

Partie A

1°) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n + 10 = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

2°) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

3°) $\frac{n^2-2n+7}{4n^3-1} = \frac{1-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}{n(4-\frac{1}{n^3})}$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 - \frac{1}{n^3} = 4$

par somme et par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(4 - \frac{1}{n^3}\right) = +\infty$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{2}{n} = 0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{n^2} = 0$ alors

par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{n} + \frac{7}{n^2} = 1$.

Donc finalement par quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2-2n+7}{4n^3-1} = 0$

4°) $3^n - 4^n = 4^n\left(\frac{3^n}{4^n} - 1\right) = 4^n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1 = -1$

$et \lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n - 4^n = -\infty$

Ex 3

1°) Pour tout entier naturel n de N

-1 ≤ $\cos(n) \leq 1$ soit comme n ≥0
-n ≤ $n\cos(n) \leq$ n puis comme $2n^2$+ 1 > 0 on a

$$\frac{-n}{2n^2+1} \leq \frac{n\cos(n)}{2n^2+1} \leq \frac{n}{2n^2+1} \text{ soit finalement } 3 - \frac{n}{2n^2+1} \leq U_n \leq 3 + \frac{n}{2n^2+1}$$

2°) $\frac{n}{2n^2+1} = \frac{1}{n(2+\frac{1}{n^2})}$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n^2} = 2$

par somme et par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = +\infty$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2n^2+1} = 0$ par quotient

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \frac{n}{2n^2+1} = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \frac{n}{2n^2+1} = 3$. D'après le théorème des gendarmes

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$.

Ex 3

La suite (U_n) est la somme des n+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$ et de premier terme U_0 =1 d'où

$U_n = 1 + \frac{3}{5} + \ldots + \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right)$ Or

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{3}{5} < 1$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n = 1$

Soit par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{5}{2}$

Ex 4

1) a) Pour tout entier naturel n, notons u_n la masse, exprimée en grammes, de bactéries dans la cuve le n-ème jour.

Puisqu'initialement, la cuve contient 1 kg ou encore 1000 g de bactéries, on a effectivement $u_0 = 1\ 000$.
Soit $n \geqslant 0$. La masse de bactéries l'année $n+1$ est obtenue en rajoutant à la masse de bactéries l'année n, c'est-à-dire u_n, 0,2 fois cette masse puis en soustrayant 100 g. Donc

$$u_{n+1} = u_n + 0,2u_n - 100 = 1,2u_n - 100.$$

b) 30 kg sont encore 30 000 g. La calculatrice fournit les valeurs suivantes :

n	u_n
0	1 000
1	1 100
2	1 220
3	1 364
4	$1\ 536,8$
5	$1\ 744,2\ldots$
6	$1\ 993,0\ldots$
7	$2\ 291,6\ldots$
8	$2\ 649,9\ldots$
9	$3\ 079,9\ldots$
10	$3\ 595,9\ldots$
11	$4\ 215,0\ldots$
12	$4\ 958,1\ldots$
13	$5\ 849,7\ldots$
14	$6\ 919,6\ldots$
15	$8\ 203,5\ldots$
16	$9\ 744,2\ldots$
17	$11\ 593,\ldots$
18	$13\ 812,\ldots$
19	$16\ 474,\ldots$
20	$19\ 669,\ldots$
21	$23\ 503,\ldots$
22	$28\ 103,\ldots$
23	$33\ 624,\ldots$

Le jour n° 23 ou encore au bout de 23 jours, la masse de bactéries dépasse 30 kg.

c)
```
def ran() :
    u=1000
    n= 0
    while u<=30000 :
        u =1.2*u – 100
        n=n+1

    return n
```

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.

- $u_0 = 1000$ et en particulier $u_0 \geqslant 1000$. L'inégalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \geqslant 1000$. Alors $1,2u_n - 100 \geqslant 1,2 \times 1000 - 100$ ou encore $u_{n+1} \geqslant 1100$ et en particulier, $u_{n+1} \geqslant 1000$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.

b) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = 1,2u_n - 100 - u_n = 0,2u_n - 100.$$

Puisque $u_n \geqslant 1000$, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0,2 \times 1000 - 100$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geqslant 100$ et en particulier $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3) a) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,2u_n - 100 - 500 = 1,2u_n - 600 = 1,2\,(u_n - 500) = 1,2v_n.$$

Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 1,2$.

b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500$. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,2^n,$$

puis que

$$u_n = v_n + 500 = 500 \times 1,2^n + 500.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = 500 \times 1,2^n + 500.}$$

c) Puisque $1,2 > 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,2^n = +\infty$ et on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$