Nom :

CONTROLE N°4 TERMINALE SPECIALITE MATHEMATIQUES DUREE 2H

Exercice 1 (3 pts)

Soit la suite (U_n) définie par $U_n = 3 + \frac{2}{3n+4}$

1°) Calculer U_0, U_1 et U_2

2°) a) Vérifier que $U_{n+1} = 3 + \frac{2}{3n+7}$

b) Montrer alors que $U_{n+1} - U_n = \frac{-6}{(3n+4)(3n+7)}$

c) En déduire la monotonie de la suite.

3°) Montrer que (U_n) est minorée par 3 .

4°) En déduire que la suite est convergente **sans utiliser les propriétés sur les opérations des limites.(On ne demande pas de calculer la limite)**

Exercice 2 (5 pts)

Déterminer la limite des suites suivantes :

1°)(U_n) est la suite définie par $U_n = n^4 - n^3 - 400$

2°)(V_n) est la suite définie par $V_n = 5n + \frac{1}{3\sqrt{n}} - \frac{1}{n^3} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3°) (W_n) est la suite définie par $\sqrt{n} - (-1)^n$

4°) (T_n) est la suite définie par $T_n = 2^n - 3^n$

5°) (b_n) est la suite géométrique de premier terme $b_0 = -2$ et de raison 4.

Exercice 3 (3 pts)

On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 4 + \frac{cos(3n)}{n^2+3}$

1°) Montrer que pour tout n de N : $4 - \frac{1}{n^2+3} \leq U_n \leq 4 + \frac{1}{n^2+3}$

2°) A l'aide du 1°) déterminer la limite de (U_n).

Exercice 4 (5 pts)

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion. On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0, 25 mg de la substance médicamenteuse. On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant : pour tout entier naturel *n*, on note U_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient **au bout de *n* périodes de trente minutes**.

On a donc $U_0 = 1$.

1°) Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.

2°) Justifier que, pour tout entier naturel *n*, $U_{n+1} = 0{,}9 \times U_n + 0{,}25$

3°) a. Montrer par récurrence sur *n* que, pour tout entier naturel *n*, $U_n \leq U_{n+1} < 5$

b. En déduire que la suite (U_n) est convergente.

4°) On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

a. A l'aide de la calculatrice déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.
b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5°) Soit (V_n) la suite définie, pour tout entier naturel n,par V_n=2,5 $- U_n$

a. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme (V_0).

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = 2{,}5 - 1{,}5 \times 0{,}9^n$

c. Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient? Justifier.

Exercice 5 (4 pts)

1°) QCM : Entourer la réponse juste (2 pts)

		A	B	C	D
1	(a_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = -6n^2 - n$. Alors …	$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -7$	$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -6$	$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
2	Une suite (b_n) converge vers 1. Il est possible que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, …	$b_n = \dfrac{1}{n}$	$b_n = \dfrac{n^2+n}{1-2n^2}$	$b_n = \dfrac{e^n}{e}$	$b_n = \dfrac{\sin(n)+n}{n}$
3	Pour tout $n \geqslant 1$, on sait que $\dfrac{2n-4}{n} \leqslant c_n \leqslant 2+\dfrac{1}{n}$. Alors …	$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 2$	$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$
4	(e_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $e_n = \dfrac{n+1}{5n+2}$. Alors …	$\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0{,}2$	$\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0{,}5$	$\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = +\infty$

2°) **Dans chaque cas dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant (2 Pts)**
Une réponse sans justification ne rapportera aucun point

1 Une suite $(u_n + v_n)$ est convergente.
Affirmation : les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

2 **Affirmation** : il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 10$.

3 (u_n) est une suite convergente et n'a aucun terme nul.
Affirmation : la suite $\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$ est convergente.

4 (w_n) est une suite définie par $w_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = w_n^4 + n - 500$.
Affirmation : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.