contrôle du 26/01/17 CORRIGÉ

Ex1

1°) $z^2 - 4z + 16 = 0$

$\Delta = 16 - 4\times 16 = -3\times 16 = (4i\sqrt{3})^2$ donc $z_1 = \frac{4+4i\sqrt{3}}{2} = 2+2i\sqrt{3}$

et $z_2 = 2 - 2i\sqrt{3}$.

$S = \{2-2i\sqrt{3} ; 2+2i\sqrt{3}\}$ 0,75

2°) a) $|a| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$ 0,5 $\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\\ \sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}$ $\theta = \frac{\pi}{3} (2\pi)$

b) $a = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$

$b = \overline{a} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$ 0,5

1,25 3°) 4°) $AB = |b-a| = |2-2i\sqrt{3}-2-2i\sqrt{3}| = |-4i\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$

$BC = |c-b| = |-4-2+2i\sqrt{3}| = |-6+2i\sqrt{3}| = 2|-3+i\sqrt{3}| = 2\sqrt{9+3} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$

$AC = |c-a| = |-4-2-2i\sqrt{3}| = |-6-2i\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$ 1

$AB = BC = AC$ donc ABC est un triangle équilatéral.

5°) a) $m = \frac{a+c}{2} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = \boxed{-1+i\sqrt{3}}$ 0,25

b) $ABDM$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MD}$

soit $b-a = d-m$ ce qui donne $d = m+b-a$

soit finalement $d = -1+i\sqrt{3} + \cancel{2} - 2i\sqrt{3} - \cancel{2} - 2i\sqrt{3}$

$\boxed{d = -1-3i\sqrt{3}}$ 0,75

Ex2

1°) a) Posons $x = 2t$ où $t \in \mathbb{R}$ alors

$\frac{e^x}{x^2} = \frac{e^{2t}}{(2t)^2} = \frac{(e^t)^2}{4(t)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{e^t}{t}\right)^2$

0,75

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{e^t}{t}\right)^2 = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0$ puisque

0,25

d'après a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

2°) a) <u>limite en $-\infty$</u>.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-x+1=+\infty$ par somme et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$

donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x+1)e^{-x}=+\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty}$

<u>limite en $+\infty$</u>

1

$g(x)=-3+x^2e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=0$ d'après 1°b)

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X}=0$

donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-3}$

b) $g'(x)=(2x-1)e^{-x}-(x^2-x+1)e^{-x}$

$g'(x)=(2x-1-x^2+x-1)e^{-x}=(-x^2+3x-2)e^{-x}$.

$g'(x)$ est du signe de $-x^2+3x-2$ puisque $e^{-x}>0$ pour tout réel x, donc d'après la règle sur le signe du trinôme :
Sachant que $-x^2+3x-2$ a 1 comme racine évidente et que l'autre racine est 2.

1

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-3+e^{-1}$	$\nearrow$	$-3+4e^{-2}$	$\searrow$	-3

3°) a) • La fonction g admet $-3+4e^{-2}$ comme maximum sur l'intervalle $[1;+\infty[$
Or $-3+4e^{-2}\simeq-2,59$ donc $g(x)<0$ pour tout x de $[1;+\infty[$

0,5

et l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution sur $[1;+\infty[$.

• La fonction g est continue et strictement décroissante de l'intervalle $]-\infty;1]$ à valeurs dans $]-3+e^{-1};+\infty]$ qui contient 0 (puisque $-3+e^{-1} \simeq -2,63$) donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires relatif aux fonctions monotones, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]-\infty ; 1]$ et ainsi dans $\mathbb{R}$.

b) $\boxed{-0,52 < \alpha < -0,51}$ car $g(-0,52) = 0,011$ et $g(-0,51) = -0,052$. 0,25

4°)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

0,25

Ex 3 PA

1°) limite en 0

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} (x-3) = -3$ donc par somme $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty}$

limite en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-3) = +\infty$ donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2°) f est la somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ elle est donc dérivable sur $]0;+\infty[$. $\boxed{f'(x) = \frac{1}{x}+1}$ Or $x>0$ donc $f'>0$ sur $]0;+\infty[$.

on en déduit que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3°) $f(2) = \ln 2 - 1 = \ln \frac{2}{e} \simeq -0,3$

$f(3) = \ln 3$

f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$ à valeurs dans $[\ln \frac{2}{e} ; \ln 3]$ qui contient 0 donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'éq. $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[2;3]$. 3

4°)

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

(PB) 1°)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1-\frac{1}{x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x - 2 = -\infty\end{array}\right\} \text{ donc par produit et somme } \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} U(x) = +\infty}$$

2°) a) U est le produit de fonctions dérivables sur I, elle est donc dérivable sur I :

$$U'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)(\ln x - 2) + \left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$U'(x) = \frac{\ln x - 2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$U'(x) = \frac{\ln x - 2 + x - 1}{x^2}$$

$$U'(x) = \frac{\ln x + x - 3}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}.$$

b) $U'(x)$ est du signe de $f(x)$ sur I puisque $x^2 > 0$ pour tout réel de I donc U est décroissante strictement sur $]0;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$U'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
U	‖ $+\infty$	$\searrow$	$U(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$U(\alpha) = \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha - 2) + 2$$

Or $\ln\alpha = 3 - \alpha$

$$U(\alpha) = \frac{\alpha-1}{\alpha} \times (3 - \alpha - 2) + 2$$

$$U(\alpha) = \frac{-\alpha^2 + 4\alpha - 1}{\alpha}$$

(PC) 1°)

$$h(x) = U(x) - \ln(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x - \cancel{2} + \frac{2}{x} + \cancel{2} - \ln x$$

$$h(x) = -\frac{1}{x}\ln x + \frac{2}{x} = \frac{2-\ln x}{x}$$

2°) C_0 et C' ont un point commun ssi $h(x) = 0$ càd

$\dfrac{2 - \ln x}{x} = 0$ avec $x > 0$

soit $\ln x = 2$

$\ln x = \ln e^2$

$x = e^2$, on a une seule solution

donc C_0 et C' ont un seul point commun $\Pi(e^2; 2)$.

3°) Pour étudier la position relative de C_0 et C' on étudie le signe de $h(x)$ sur I qui est celui de $2 - \ln(x)$ sur I puisque $x > 0$ pour tout réel de I. Or

$2 - \ln x > 0$ ssi $2 > \ln x$ càd $\ln e^2 > \ln x$ soit

$0 < x < e^2$. On en déduit que :

C_0 est au-dessous de C' sur $]0; e^2]$ et en-dessous de $\mathcal{C}'$ sur $[e^2; +\infty[$.

Ex 4 : 1°) a) $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$:

Comme $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} - 2e^x + e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1$

alors $\underline{g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)}$.

b) $2e^x + 1 > 0$ pour tout réel x puisque $e^x > 0$ pour tout réel x donc $g'(x)$ est du signe de $e^x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

Or $e^x - 1 > 0$ équivaut $e^x > 1$ soit $e^x > e^0$ càd $x > 0$. On en déduit le tableau de variation de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

* Etude des limites

Le minimum de g est $m = 0$

* limite en $+\infty$

$g(x) = e^{2x} - e^{x} - x = e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} = 1$

on en déduit par produit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

* limite en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ donc

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

c) $U_{n+1} - U_n = g(U_n)$ or d'après 1°) b) $g(x) \geqslant 0$ pour tout réel x

on en déduit que $g(U_n) \geqslant 0$ pour tout entier naturel n

càd $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$ soit $U_{n+1} \geqslant U_n$ pour tout entier naturel n

2°) $a = 0$

a. Initialisation : $U_0 = 0$ et $0 \leq 0$ donc $U_0 \leq 0$ donc P_0 est vraie.

HEREDITE : On suppose que pour un entier n fixé P_n est vraie càd que $U_n \leq 0$

Or $U_{n+1} = e^{U_n}(e^{U_n} - 1)$ avec $e^{U_n} > 0$

Comme $U_n \leq 0$ alors $e^{U_n} \leq 1$ soit $e^{U_n} - 1 \leq 0$

On en déduit donc que $U_{n+1} \leq 0$ et P_{n+1} est vraie.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire donc on a montré par récurrence que la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n càd $U_n \leq 0$ pour tout entier naturel n.

b- $U_n \leq 0$ pour tout entier n or pour tout entier n
$U_{n+1} \geq U_n$ soit $U_n \geq U_0$ d'où $U_n \geq 0$ et $U_n = 0$ pour tout n.
La suite est constante. $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

3°) a) $U_{n+1} - U_n = g(U_n)$ or $U_0 \leq U_n$ pour tout entier naturel n puisque $U_n \leq U_{n+1}$ pour tout n donc $U_n \geq 2$ et $g(U_n) \geq g(2)$ car g est croissante sur $[0;+\infty[$. On a donc bien $U_{n+1} - U_n \geq g(2)$ pour tout entier naturel n.

b) $\underline{I}$: $U_0 = 2$ $\quad 2 + 0 \times g(2) = 2$ donc
$U_0 \geq 2 + 0 \times g(2)$ et P_0 est vraie.

$\underline{H}$: On suppose pour un entier n fixé que la pté P_n est vraie càd : $U_n \geq 2 + n \times g(2)$

Or $U_{n+1} \geq U_n + g(2) \geq 2 + n \times g(2) + g(2)$

soit $U_{n+1} \geq 2 + (n+1) \times g(2)$ et P_{n+1} est vraie. donc la pté est héréditaire

$\underline{C}$: P_0 est vraie et la pté est héréditaire donc on a démontré par récurrence que pour tout entier naturel n $U_n \geq 2 + n \times g(2)$

4°)

Variables	N entier naturel, u et M sont des réels
INITIALISATION	u prend la valeur 0,02
	N prend la valeur 0
	Saisir la valeur de M
TRAITEMENT	Tant que $u \leq M$
	U prend la valeur $e^{2U} - e^{U}$
	N prend la valeur N+1
	Fin tant que
SORTIE	Afficher N

N=36