CONTROLE DE MATHEMATIQUES N°2.TS.DUREE : 3 Heures . le 14/11/19 corrigé

EXERCICE 1

Partie 1

1. **Limites en l'infini**

En $+\infty$

On a une forme indéterminée en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})}{x(1-\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})}{1-\frac{1}{x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ soit par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

Soit finalement par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}) = +\infty$

De plus, par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x} = 1$ Donc par quotient de limites $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

En $-\infty$

On a aussi une forme indéterminée en $-\infty$ donc en procédant de la même manière qu'en $+\infty$ on montre que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

En 2

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x^3 - x^2 + 1 = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x - 1 = 0^+$

Donc par quotient des limites

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x^3 - x^2 + 1 = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x - 1 = 0^-$

Donc par quotient des limites

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty}$$

2. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$ alors la droite Δ d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à C .

Partie 2

1. a

· **Limite en + ∞**

En + ∞ on a une indéterminée.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(2-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{4}{x}=0 \\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^3}=0\end{array}\right\}$$ donc par somme des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}=2$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc par produit des limites $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

Limite en - ∞

En - ∞ on a aussi une indéterminée alors de la même façon on montre que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$$

b. g est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur ℝ.

g'(x) = $6x^2 - 8x + 2$

Δ = 64 – 4x6x2 = 16 x1 = 1 et x2 = $\frac{1}{3}$

D'après la règle sur le signe du trinôme du second degré on en déduit le signe de g'(x) et le tableau de variation de g sur ℝ :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	0	+	
g(x)	$-\infty$	↗	$\frac{-19}{27}$	↘	-1	↗	$+\infty$

c. g<0 sur]-∞ ;1] car le maximum de la fonction g sur cet intervalle est $\frac{-19}{27}$.

La fonction g est continue et strictement croissante de l'intervalle $[1\,;+\infty[$ à valeurs dans l'intervalle $[-1;+\infty[$ qui contient 0, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires relatif aux fonctions strictement monotones l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans $[1\,;+\infty[$.

d. Comme g(1,565) ≈- 0.0008 et que g(1,566) ≈ 0.0033 on en déduit que α≈ 1,566

e. On en déduit le signe de g sur R \{1}

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
g(x)		-	‖	-	0	+	

2. La fonction f qui est une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition

$$f'(x) = \frac{(3x^2-2x)(x-1)-(x^3-x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^3-4x^2+2x-1}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

3. Comme $(x-1)^2 > 0$ pour tout x de R\{1} on en déduit que $f'(x)$ est du signe de g(x) sur R\{1} . On a donc le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$f(\alpha) \approx 4{,}22$

Partie 3

1. Une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 2 est

   $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$ soit $\boxed{y = 3x - 1}$

2. $h(x) = f(x) - (3x - 1) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x-1} - 3x + 1 = \dfrac{x^3 - x^2 + 1 - 3x^2 + 3x + x - 1}{x-1}$

   $h(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x-1} = \dfrac{x(x^2 - 4x + 4)}{x-1} = \dfrac{x(x-2)^2}{x-1}$

Pour étudier la position relative de C et T il faut et il suffit d'étudier le signe de h(x) qui dépend du signe de $\frac{x}{x-1}$ puisque $(x-2)^2 \geq 0$; Soit comme $\frac{x}{x-1}$ est du même signe sur R\{1}que le trinôme $x(x-1) = x^2 - x$, d'après la règle sur le signe du trinôme on a :

x	$-\infty$ 0 1 2 $+\infty$
h(x)	+ 0 - ‖ + 0 +

D'après le tableau de signe obtenu on peut dire que :
C en dessous de T sur] 0 ; 1[et au – dessus de T sur] -∞ ; 0[U] 1 ; 2 [U]2 ; + ∞[
C et T se coupent en x=0 et x=2.

Exercice 2

1°) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = (\cos)'(0) = 1$

2°) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc par composition des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2} = +\infty$

3) Par composition. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x - 1 = -\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{3x-1} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{3x-1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par composition} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \cos\left(\dfrac{2}{3x-1}\right) = 1 \end{array}$$

4) Par le théorème des gendarmes. On a les encadrements suivants avec $x > 1$:

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$
$$3x - 1 \leqslant 3x + \sin x \leqslant 3x + 1$$
$$\frac{3x-1}{x-1} \leqslant \frac{3x + \sin x}{x-1} \leqslant \frac{3x+1}{x-1}$$

or $\dfrac{3x-1}{x-1} = \dfrac{x\left(3 - \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \dfrac{\left(3 - \frac{1}{x}\right)}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 - \dfrac{1}{x} = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$

Par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-1}{x-1} = 3$. On peut montrer de même que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+1}{x-1} = 3$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x + \sin x}{x-1} = 3$

Exercice 3

A-

1- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x > -5}} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x < -5}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$

2- Asymptotes verticales : x = -5 et x=2
Asymptotes horizontales : y =2

B- a-h ; b- f ; c-k ; d-g

Exercice 4

1. L'algorithme n° 1 calcule tous les termes de v_0 à v_n mais n'affiche que le dernier v_n.
L'algorithme n° 2 calcule n fois de suite v_1 à partir de v_0 : il ne calcule pas les termes de 0 à v_n.
L'algorithme n° 3 calcule tous les termes de 0 à v_n et les affiche tous.

2) Il semblerait que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit strictement croissante et converge vers un réel proche de 3.

3) a) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

- $v_0 = 1$ et $0 < 1 < 3$. Donc $0 < v_0 < 3$. L'encadrement à démontrer est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $0 < v_n < 3$ et montrons que $0 < v_{n+1} < 3$.

$$\begin{aligned} 0 < v_n < 3 &\Rightarrow -3 < -v_n < 0 \Rightarrow 3 < 6 - v_n < 6 \\ &\Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3} \text{ (par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[) \\ &\Rightarrow \frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3} \\ &\Rightarrow 0 < v_{n+1} < 3. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 < v_n < 3.}$$

b) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6 - v_n} - v_n = \frac{9 - v_n(6 - v_n)}{6 - v_n} = \frac{v_n^2 - 6v_n + 9}{6 - v_n} = \frac{(v_n - 3)^2}{6 - v_n}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n - 3)^2}{6 - v_n}.}$$

Soit n un entier naturel. D'après la question $v_n < 3$ et en particulier, $6 - v_n > 0$ et aussi $(v_n - 3)^2 > 0$.
On en déduit que pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} - v_n > 0$ et donc

$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est strictement croissante.}}$

c) La suite (v_n) est croissante d'après la question 3)b) et majorée par 3 d'après la question 3)a). On en déduit que la suite (v_n) converge.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est convergente.}}$$

Partie B. Recherche de la limite de la suite (v_n)

1) Puisque pour tout entier naturel n, on a $v_n \neq 3$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Soit n un entier naturel.

$$w_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}-3} = \frac{1}{\dfrac{9}{6-v_n}-3} = \frac{1}{\left(\dfrac{9-3(6-v_n)}{6-v_n}\right)} = \frac{1}{\left(\dfrac{3v_n-9}{6-v_n}\right)} = \frac{6-v_n}{3(v_n-3)},$$

puis

$$w_{n+1} - w_n = \frac{6-v_n}{3(v_n-3)} - \frac{1}{v_n-3} = \frac{6-v_n-3}{3(v_n-3)} = \frac{-(v_n-3)}{3(v_n-3)} = -\frac{1}{3}.$$

Donc, pour tout entier naturel n, $w_{n+1} - w_n = -\dfrac{1}{3}$ et on en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ est arithmétique de raison } r = -\frac{1}{3}.}$$

2) Déjà, $w_0 = \dfrac{1}{v_0-3} = \dfrac{1}{1-3} = -\dfrac{1}{2}$. Mais alors, pour tout entier naturel n,

$$w_n = w_0 + nr = -\frac{1}{2} - \frac{n}{3} = -\frac{2n+3}{6},$$

puis

$$v_n = 3 + \frac{1}{w_n} = 3 - \frac{6}{2n+3}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_n = 3 - \frac{6}{2n+3}.}$$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+3) = +\infty$ puis en prenant l'inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+3} = 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 3 - 6 \times 0 = 3.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 3.}$$