CONTROLE DE MATHS N°1 TRIM 2 DUREE : 3 H

Exercice 1 (4 points)
La figure sera complétée sur la feuille donnée en annexe tout au long de l'exercice.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit A le point d'affixe $z_A = 3 - 3i\sqrt{3}$, B le point d'affixe $z_B = 2 + 2i$,
C le point d'affixe $z_C = 2\sqrt{3} + 2i$ et D le point d'affixe $z_D = 4i$

1°) Déterminer la forme exponentielle de z_A, z_B , z_C et z_D.

2°) a) Placer les points B et D

b) A l'aide d'une méthode géométrique, construire les points A et C.
(On laissera apparents les traits de construction)

3°)a) Soit I le milieu du segment [BC]. Déterminer l'affixe z_I de I.

b) Déterminer l'affixe du point E tel que le quadrilatère BDCE soit un parallélogramme.

Exercice 2 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A

1.a. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

b. Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :
a. $j^3 = 1$;
b. $j^2 = -1 - j$.
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
Quelle est la nature du triangle PQR? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2 c = 0$.
On note A,B,C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.
1. En utilisant la question A -3. b., démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.
2. En déduire que AC= BC.
3. Démontrer l'égalité : $a - b = j^2 (b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 3(2 points)

QCM Donner la seule réponse exacte parmi les trois proposées.

1. Pour tout $x \neq 0$, l'expression $\dfrac{e^{2x} - e^{x}}{e^{x} + 1}$ est aussi égale à :

   a) $\dfrac{e^{x} - 1}{1 - e^{x}}$; b) $\dfrac{e^{x} - 1}{1 + e^{-x}}$; c) $\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

2. L'équation $e^{x^2 - x - 1} = e^{3x-4}$ a pour solutions :

   a) $x = 1$ et $x = -3$; b) $x = -1$ et $x = 3$; c) $x = 1$ et $x = 3$.

3. La limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de $e^{x} - 2x$ est :

   a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 0.

4. La dérivée de la fonction f définie, pour tout réel x, par $f(x) = xe^{-2x}$ est :

   a) $f'(x) = 2xe^{-2x}$; b) $f'(x) = (2x - 1)e^{-2x}$; c) $f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$.

Exercice 4 (3 points)

Soit la fonction f définie sur I = [0 ; $+\infty$ [par : $f(x) = (x - 5)\, e^{x}$

1°) Déterminer les limites de f en $+\infty$.

2°) a) Déterminer la dérivée de la fonction f.

b) Donner le tableau de variation de f sur I où figurera le signe de $f'(x)$.

Exercice 5 (5 points)

Soit f la fonction définie sur |R par $f(x) = \sin^2 x + 2\cos x$.

1°) a) Montrer que pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$.

b) Montrer que f est périodique de période 2π .

On décide alors de restreindre l'étude des variations de f à l'intervalle I = $[0 ; \pi]$.

2°)a) Calculer la dérivée de f et montrer que $f'(x) = 2\sin x\,(\cos x - 1)$.

b) Etudier le signe de f 'sur I puis donner le tableau de variation de f sur I.

3°) a) Donner une équation de la tangente To à C au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

b) Donner une équation de la tangente T_1 à C au point d'abscisse $\frac{\pi}{3}$.