COMPLEXES ET GEOMETRIE

I) Vecteurs

1°) Affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Soit $\vec{u}$(a;b) un vecteur du plan alors l'affixe de $\vec{u}$ est $z_{\vec{u}}$ = a + ib

Si A(z_A) et B(z_B) alors l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

Exemple : Quel est l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ où A(1+i) et B(4 – 2i)

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 4 - 2i - (1 + i) = 3 - 3i$

2°) Affixe du milieu

Soit A(z_A) et B(z_B) alors l'affixe du milieu I de [AB] est :

$$z_I = \frac{z_B + z_A}{2}$$

Exemples:

EX 1On donne 3 pts A(4 +2i) , B (1 -3i) et C(-2)
1.Déterminer l'affixe du milieu I de [AC] .
2.En déduire l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Correction :

$z_I = 1 + i$; ABCD parallélogramme ssi $(Z_B + z_D)/2 = z_I$ càd t $z_D = 2 + 2i - 1 + 3i$

Ce qui donne $z_D = 1 + 5i$

EX 2 Soient A(3 ; 2) B(0 ;-1) C(-2 ;-3)
Montrer que les trois points sont alignés.

Correction

$Z_{\overrightarrow{AB}} = -3-3\,i = \frac{3}{5} Z_{\overrightarrow{AC}}$

II) Module d'un nombre complexe. Argument d'un nombre complexe non nul.

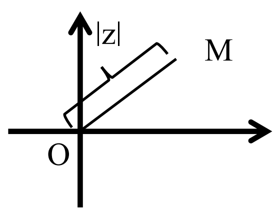
1°) Module

Définition

Si le point M(x ; y) est l'image du nombre complexe $z = x + iy$
Le module de z est la longueur OM c'est – à – dire la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$

On le note | z |. On a donc

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z.\bar{z}} = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$$



Exemples :

Déterminer le module de chacun des nombres suivants -3i ; (-2 +5i) ; (11 -7 i) ; (4 +i $\sqrt{3}$)

Corrigé : $|-3i| = 3$ $\quad |-2 + 5i| = \sqrt{29}$ $\quad |11 - 7i| = \sqrt{170}$ $\quad |4 + i\sqrt{3}| = \sqrt{19}$

Propriété

$$AB = |z_B - z_A| \qquad\qquad \|\vec{u}\| = |z_{\vec{u}}|$$

Preuve : Soit $\vec{OM} = \vec{AB}$ $M(z_B - z_A)$ $AB = OM = |z_B - z_A|$

Exemple : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O ; u , v)
Soit les points A(2) ,B(2i) ,C(-2) et D(- i) .
Déterminer AB, BC, CD, AD ;

Corrigé : $AB = |z_B - z_A| = 2\sqrt{2}$ $BC = 2\sqrt{2}$ $CD = \sqrt{5}$ $AD = \sqrt{5}$

Remarque 1: $|z| = 0$ ssi $z = 0$.

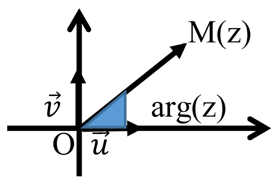
en effet $|z| = 0$ équivaut à OM = 0 soit O et M confondus càd z =0

Remarque 2 : $|z| = z$ ssi z est un réel positif

2°) Argument d'un nombre complexe non nul

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct (O ; u , v) .
On choisit un point M du plan complexe distinct de l'origine **d'affixe z non nul**.

Définition
Soit z un nombre complexe **non nul**.
Un **ARGUMENT de z est une MESURE** en radians de l'angle **$(\vec{u} ; \vec{OM})$**
Et on écrit



$$\mathbf{Arg(z) = (\vec{u} ; \vec{OM}) + k\,2\pi ,\ k \text{ dans } \mathbb{Z} \text{ ou } Arg(z) = (\vec{u} ; \vec{OM})\ (2\pi)}$$

Exercice: Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O ; u , v)
Soit les points A(2) ,B(2i) ,C(-2) et D(- i) .
Déterminer un argument de l'affixe de chacun des points A, B, C et D.

Corrigé : 0 ; $\pi/2$; π ; $-\pi/2$

III) Forme trigonométrique

1°)Définition

Soit M le point d'affixe z avec **z non nul**. Si $|z| = r$ et $\arg z = \theta\ (2\pi)$ alors

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

C'est la FORME TRIGONOMETRIQUE DE Z .

2°) Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Soit z non nul. $z = x + iy$ alors

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ **et** $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

D'où

$$z = |z| \, (\cos\theta + i \sin\theta)$$

Exemple : forme trigonométrique de $z = 1 + i\sqrt{3}$

$|z| = \sqrt{1+3} = 2$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \quad \theta = \frac{\pi}{3} (2\pi)$

$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$

3°) Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique

Soit z non nul.

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Soit $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ et $z = x + iy$

Exemple : forme algébrique de $z = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}$

$x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **donc** $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

4°) Calculs avec la forme trigonométrique

a) Propriétés du module et de l'argument

1. $|-z| = |z|$ et $\arg(-z) = \arg z + \pi \ (2\pi)$

2. $|z| = |\bar{z}|$ et $\arg \bar{z} = -\arg z \ (2\pi)$

3. $|z.z'| = |z|.|z'|$ et $\arg zz' = \arg z + \arg z' \ (2\pi)$

4. $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\arg \dfrac{1}{z} = -\arg z \ (2\pi)$

5. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $\arg \dfrac{z}{z'} = \arg z - \arg z' \ (2\pi)$

6. $|z^n| = |z|^n$ n dans Z et $\arg z^n = n \arg z \ (2\pi)$ pour tout entier n

Preuves pour le module:

1. immédiat ; 2. immédiat

3. $|z.z'|^2 = zz'\overline{zz'} = z\bar{z}\, z'\bar{z'} = |z|^2|z'|^2$

4. $|z z'| = 1$ d'où $|z|.|z'| = 1$ 5. conséquence du 3 et du 4. 6. récurrence

ROC

Preuves pour l'argument :

1. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $z' = r(\cos\theta' + i\sin\theta')$ d'où $-z = -r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(-\cos\theta - i\sin\theta)$ $=$ $r(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$

2. $\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$.

3. $zz' = rr'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta)]$
$zz' = rr'[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]$

4. $zz' = 1$ et la propriété 3. donne le résultat !
5. $z/z' = z \times 1/z'$ et les propriétés 3. et 4. donnent le résultat
6. Récurrence

Exemples : $|i| = 1$ $|x| = |x|$ si x dans R
(module) (valeur absolue)

b) <u>Inégalité triangulaire</u>

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

c) <u>Propriétés importantes de l'argument</u>

1. z dans R* ssi arg z = 0 (z dans R^{+*}) ou arg z = π (z dans R^{-*})
2. z dans iR* ssi arg z = π/2 (z dans iR^{+*}) ou arg z = -π/2 (z dans iR^{-*})

<u>Egalité de deux nombres complexes non nuls</u>

soit z et z' deux nombres complexes non nuls

$$z = z' \quad \text{ssi} \quad |z| = |z'| \text{ et } \arg z = \arg z' \ (2\pi)$$

IV) NOTATION EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Formules d'EULER

Pour tout nombre réel θ on a :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{d'où} \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Des exemples à retenir :

$e^{i0} = 1 \quad e^{i2\pi} = 1 \quad e^{i\pi} = -1 \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \quad e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Conséquence 1

Tout nombre complexe non nul tel que $|z| = r$ et $\arg z = \theta\ (2\pi)$ peut s'écrire **$z = r\,e^{i\theta}$**

C'est **la forme exponentielle** de z.

Exemple: $3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$

Conséquence 2

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Exemple :

$$\cos 2x = \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} \qquad \text{et} \quad \sin 2x = \frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i}$$

Conséquence 3 : Formule de Moivre

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ pour tout entier n soit $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Un Exemple important : linéariser $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$

$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{i3x} + 3\,e^{i2x}e^{-ix} + 3\,e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x}\right) = 1/8[e^{i3x} + e^{-i3x} + 3\,(e^{ix} + e^{-ix})\,]$

Soit $\cos^3 x = ¼\,(\cos 3x + 3\cos x)$

Propriétés

1. $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg e^{i\theta} = \theta \ (2\pi)$

2.Pour tous réels θ et θ'

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$ $\qquad \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\qquad \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}$

$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta + \theta')}$ $\qquad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

Exercices : 1) Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :
$z_1 = (2 - 2i)/(\sqrt{3} + i)$; $z_2 = (1 + i\sqrt{3})/(-1 + i\sqrt{3})$; $z_3 = (-1 + i)^{12}$

2) Soit $z = 3\,e^{i\pi/3}$; montrer que z^{57} est réel.

1) $z_1 = \sqrt{2}\,e^{-i5\pi/12}$ $\quad z_2 = e^{-i\pi/3}$ $\quad z_3 = (\sqrt{2}\,e^{i3\pi/4})^{12} = -64$

2) $z^{57} = -3^{57}$